

# ANNALEN DER PHYSIK

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH  
F. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF,  
G. u. E. WIEDEMANN, P. DRUDE

VIERTE FOLGE

BAND 68  
DER GANZEN REIHE 373. BAND

KURATORIUM:  
M. PLANCK, G. QUINCKE, W. C. RÖNTGEN, E. WARBURG

UNTER MITWIRKUNG  
DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT  
HERAUSGEGEBEN VON

W. WIEN UND M. PLANCK

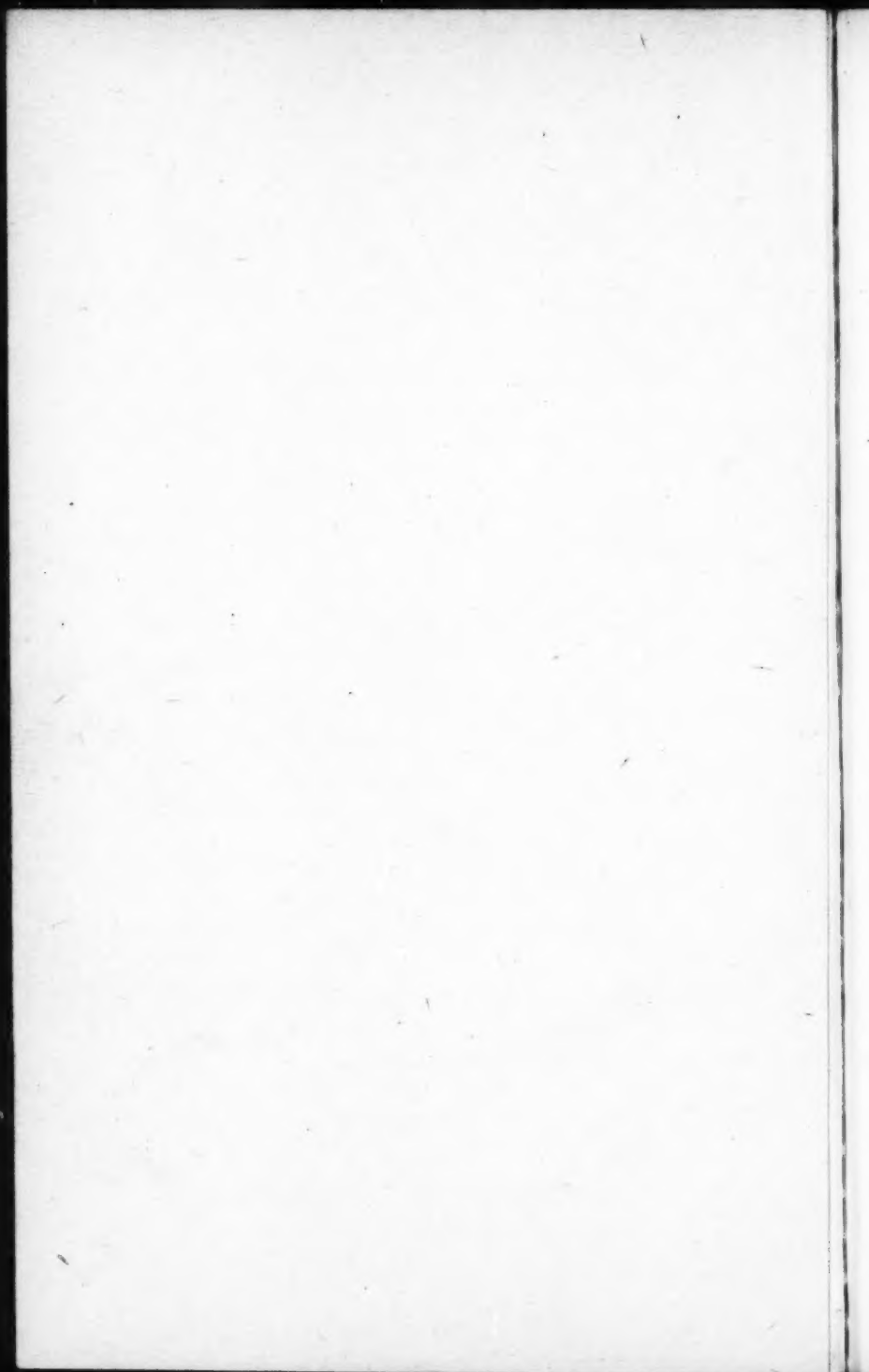
MIT EINER FIGURENTAFEL



I 9 2 2

---

LEIPZIG · VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH



# ANNALEN DER PHYSIK

VIERTE FOLGE

BAND 68





# ANNALEN DER PHYSIK

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH  
F. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF,  
G. u. E. WIEDEMANN, P. DRUDE

VIERTE FOLGE  
BAND 68 HEFT 1  
DER GANZEN REIHE 373. BANDES 1. HEFT

KURATORIUM:  
M. PLANCK, G. QUINCKE, W. C. RÖNTGEN, E. WARBURG

UNTER MITWIRKUNG  
DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT  
HERAUSGEGEBEN VON

W. WIEN UND M. PLANCK



L E I P Z I G

VERLAG VON JOHANN AMBROSIOUS BARTH

Bestellungen auf die „Annalen“ werden von allen Buchhandlungen und der Verlagsbuchhandlung entgegengenommen. Im Jahre 1922 erscheinen Bd. 67, 68 und 69 à 8 Hefte. Preis von Band 68 für Belgien, Luxemburg und Frankreich Fr. 47.—; Dänemark Kr. 20.—; England £ -19.—; Finnland Marka 60.—; Holland fl. 11.—; Japan £ -19.—; Italie. Lire 60.—; Norwegen Kr. 24.—; Schweden Kr. 20.—; Schweiz Fr. 20.—; Spanien Pes. 24.—; U.S.A. \$ 4.—.

Ausgegeben am 20. Juli 1922.

# Inhalt.

	Seite
1. A. H. Bucherer. Gravitation und Quantentheorie . . . . .	1
2. Roland von Eötvös †, Desiderius Pekár und Eugen Fekete. Beiträge zum Gesetze der Proportionalität von Trägheit und Gravität . . . . .	11
3. G. Borelius. Zur Theorie einer neuen Umwandlungserscheinung in Metallen . . . . .	67

Die Redaktion der Annalen wird von den umseitig genannten Herren besorgt. Den geschäftlichen Teil hat Herr **Geh. Hofrat Prof. W. Wien** übernommen, an den auch Manuskripte zu senden sind. Seine Adresse ist: **München, Leopoldstraße 91.**

Es wird gebeten, die Manuskripte **druckfertig** einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Für die Aufnahme von Dissertationen gelten besondere Bedingungen, welche vom Verlag bekannt gegeben werden.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 **Sonderabdrücke** jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muß dies bei Rücksendung des ersten Korrekturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

**Anderweitiger Abdruck** der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Übersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.

Die **Zeichnungen** sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzuzeichnen). Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

**Zitate** sind am Rande oder unten auf den Seiten des Manuskriptes (nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in den „Fortschritten der Physik“ üblichen Form mit Angabe des Namens und Vornamens, der Band-, Seiten- und Jahreszahl aufzuführen.





## Inhalt.

### Vierte Folge. Band 68

#### Neuntes Heft.

Seite

1. A. H. Bucherer. Gravitation und Quantentheorie . . . . . 1
2. Roland von Eötvös †, Desiderius Pekár und Eugen Fekete. Beiträge zum Gesetze der Proportionalität von Trägheit und Gravität. . . . . 11
3. G. Borelius. Zur Theorie einer neuen Umwandlungserscheinung in Metallen . . . . . 67

*Ausgegeben am 20. Juli 1922.*

#### Zehntes Heft.

1. L. C. Glaser. Über das Spektrum des Beryllium und eine bemerkenswerte Beziehung desselben zu dem des Aluminium. (Hierzu Tafel I.) . . . . . 73
2. Hilding Faxén. Der Widerstand gegen die Bewegung einer starren Kugel in einer zähen Flüssigkeit, die zwischen zwei parallelen ebenen Wänden eingeschlossen ist. . . . . 89
3. J. Herweg und G. Mie. Die Zahl der von sehr schwachen Röntgenstrahlen ausgelösten Elektronen. . . . . 120
4. G. Szivessy. Der Temperaturkoeffizient der magnetischen Doppelbrechung . . . . . 127

	Seite
5. B. Gudden und R. Pohl. Über den $\text{ZnSCu}$ -Phosphor . . .	154
6. W. Schottky. Zur Berechnung und Beurteilung des Schrotteffektes. (Bemerkungen zu der Notiz von Herrn J. B. Johnson.)	157

*Ausgegeben am 20. Juli 1922.*

#### Elftes Heft.

1. W. Pauli jr. Über das Modell des Wasserstoffmoleküls .	177
2. Franz Simon. Untersuchungen über die spezifische Wärme bei tiefen Temperaturen . . . . .	241

*Ausgegeben am 3. August 1922.*

#### Zwölftes Heft.

1. Franz Selety. Beiträge zum kosmologischen Problem . .	281
2. Walther Deutsch. Bewegung und Ladung der Elektrizitätsträger im Zylinderkondensator . . . . .	335
3. F. Harms und H. Niebauer. Über einwellige Systeme mit gekoppelten Schwingungskreisen . . . . .	345
4. O. E. Frivold. Einfluß kleiner Mengen von Eisen auf die Suszeptibilität diamagnetischer Elemente. (Zweite Mitteilung.)	356

*Ausgegeben am 17. August 1922.*

#### Dreizehntes Heft.

1. Ernst Wagner und H. Kulenkampff. Die Intensität der Reflexion von Röntgenstrahlen verschiedener Wellenlänge an Kalkspat und Steinsalz. . . . .	369
2. Johannes Rosenberg. Ein Beitrag zur Theorie der Lichtzerstreuung kugelförmiger Medien und Berechnungen für das nach zweimaliger Innenreflexion austretende Lichtbüschel . .	414
3. K. R. Koch und R. Dieterle. Die Elastizität einiger Metalle und Legierungen bis zu Temperaturen, die ihrem Schmelzpunkt naheliegen; B. Elastizitätsmodul . . . . .	441
4. B. Wwedensky und K. Theodortschik. Über die Abhängigkeit der Permeabilität der Eisendrähte von der Frequenz im Wellenlängenbereich von 54 bis 705 m. . . . .	463

*Ausgegeben am 31. August 1922.*

**Vierzehntes Heft.**

Seite

1. W. Schottky. Zur statistischen Fundamentierung der chemischen Thermodynamik . . . . . 481
2. A. H. Bucherer. Gravitation und Quantentheorie. II . . . 545
3. W. Hallwachs, M. Sende und H. Simon. Bemerkung zu dem Referat in den Physikalischen Berichten über unsere Arbeiten über „Lichtelektrizität als Funktion des Gasgehaltes“ . 551

*Ausgegeben am 14. September 1922.*

**Fünfzehntes und sechzehntes Heft.**

1. P. Lenard. Über die Lichtwirkung auf Zinksulfid . . . . 553
2. Maximilian Camillo Neuburger. Der Feinbau der Atomkerne und die Veränderung des Coulombschen Gesetzes im Innern der Kerne. I. Die Atomkerne von Lithium und Isohelium. . . . . 574
3. Georg Jaffé. Grundriß einer Theorie des anisotropen Strahlungsfeldes . . . . . 583

*Ausgegeben am 4. Oktober 1922.*

**Nachweis zu der Figurentafel.**

---

**Tafel I. L. C. Glaser.**

---



# ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 68

## 1. *Gravitation und Quantentheorie;* *von A. H. Bucherer.*

Die Einsteinsche Theorie nimmt erkenntnistheoretisch eine eigenartige Stellung ein. Während sie die fundamentalen Begriffe der Physik erweitert und ergänzt und zur Entdeckung neuer Gesetzmäßigkeiten führt, knüpft sie nicht an die konkreten Bilder der Erscheinungswelt an und bringt keine Aufklärung über das eigentliche Wesen der Gravitation; sie verknüpft die Schwerkraft nicht mit anderen Eigenschaftsgrößen der Materie.

Vielen Physikern hat sich die Überzeugung aufgedrängt, daß der abstrakten Einsteinschen Theorie ein physikalisches Gegenstück entsprechen müsse, mit anderen Worten, daß sich die Einsteinschen Gravitationseffekte aus einer sinnfälligen Hypothese ableiten lassen. Die dahingehenden Bestrebungen sind bekannt. Ich verweise besonders auf die gedankenreiche, bedeutende Arbeit P. Lenards, „Äther und Uräther“.

### I.

Ich glaube in der Quantenhypothese eine Grundlage zur Erklärung dieser Effekte gefunden zu haben. Zu den weiteren Voraussetzungen, auf die ich mich stütze, gehört das Resultat der Maxwell'schen Theorie, daß der Energie  $E$  eine träge Masse zuzuordnen ist:

$$(1) \quad m = \frac{E}{v^2},$$

wo  $v$  die Lichtgeschwindigkeit bedeutet. Schließlich ordne ich der Energie eine schwere Masse zu auf Grund der Versuche Zeemans und Southern's.

Wir betrachten zunächst folgenden Vorgang. Wir bringen ein Lichtquant von der Frequenz  $n_0$  unter maximaler Arbeitsleistung aus dem Unendlichen auf die Entfernung  $r$  von einem Zentralkörper. Hierbei wird eine Arbeit  $\mu m/r$  gewonnen

wenn  $m$  die Masse des Lichtquants bedeutet. Da die Energie des Lichtquants um denselben Betrag abnimmt, und hierdurch seine Frequenz von  $n_0$  auf  $n$  sinkt, so ergibt sich die Beziehung:

$$(2) \quad \begin{cases} h n = h n_0 - \frac{\mu m}{r} \\ h n = h n_0 \left( 1 - \frac{\mu m}{r h n_0} \right). \end{cases}$$

Gemäß Gleichung (1) können wir für die Energie  $h n_0$  des Lichtquants  $m_0 v^2$  setzen, wobei  $m_0$  den Wert der Masse außerhalb des Gravitationsfeldes bedeutet. Es ergibt sich:

$$(3) \quad n = n_0 \left( 1 - \frac{\mu}{r v_0^2} \right).$$

Findet z. B. die Schwingung auf der Oberfläche der Sonne statt, wo  $r = R$ , so wird:

$$(4) \quad - \frac{\Delta n}{n} = \frac{\mu}{R v_0^2}$$

oder, wenn  $\lambda$  die Wellenlänge bezeichnet:

$$(5) \quad \frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{\mu}{R v_0^2}.$$

Es tritt also eine Verschiebung der Linien des Sonnenspektrums auf gegenüber den außerhalb des Gravitationsfeldes gemessenen Linien. Da wegen der Größe des Abstandes der Erde von der Sonne die Verhältnisse so liegen, als ob die Beobachtung im Unendlichen stattfände, so wird der Beobachter eine Verschiebung nach Gleichung (5) messen. Einstein findet denselben Wert für die Rotverschiebung. Auch haben K. Försterling und Mohorovičić schon unter Benutzung der Quantentheorie diese Gleichung abgeleitet, wie ich nachträglich gefunden habe.

Da die Lichtquanten neutrale Körper darstellen, so liegt es nahe, eine solche Einwirkung eines Schwerfeldes auf beliebige frei schwingende oder frei rotierende Körper auszu dehnen<sup>1)</sup>, *gleichgültig, unter welcher Kraftwirkung sie sich bewegen.*

1) Um die Planetenbewegung einzuschließen, kennzeichne der Index 0 die Werte, die bei Gültigkeit der Formeln der klassischen Mechanik bestehen würden.

Betrachtet man die Vorgänge der Emission und der Absorption, bei denen Teile der Atommassen in Strahlungsmassen und letztere in Atommassen übergehen, so wäre es nicht folgerichtig, bei diesen Übergängen eine Wechselwirkung verschiedenartiger Massengattungen anzunehmen.

Es gilt daher ganz allgemein für beliebige Körper:

$$(6) \quad n = n_0 \left(1 - \frac{\mu}{r v_0^2}\right) \text{ oder } \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_r = \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0 \left(1 - \frac{\mu}{r v_0^2}\right),$$

wo  $\frac{d\varphi}{dt}$  die Winkelgeschwindigkeit bedeutet. Der Index 0 bedeutet, daß sich der Wert der betreffenden GröÙe auf seine Stelle außerhalb des Gravitationsfeldes bezieht.<sup>1)</sup>

Rotiert ein Körper unter der Einwirkung einer Kraft außerhalb des Gravitationsfeldes, und bezeichnen wir seine kinetische Energie mit  $E$ , wo

$$E_0 = \frac{1}{2} m_0 R^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0^2,$$

so ist seine Energie im Abstände  $r$  vom Zentralkörper:

$$(7) \quad E = \frac{1}{2} m R^2 \left(1 - \frac{2\mu}{r v_0^2}\right) \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0^2.$$

Daher ist

$$\frac{E}{E_0} = \frac{m}{m_0} \left(1 - \frac{2\mu}{r v_0^2}\right).$$

Da aber nach Gleichung (4)

$$\frac{h n}{h n_0} = \frac{E}{E_0} = 1 - \frac{\mu}{r v_0^2},$$

so folgt für eine rotierende Masse:

$$(8) \quad m = m_0 \left(1 + \frac{\mu}{r v_0^2}\right),$$

und unter Zuhilfenahme von (3) für Kreisbewegungen:

$$(9) \quad v^2 = v_0^2 \left(1 - \frac{2\mu}{r v_0^2}\right).$$

Diese Gleichung besagt, daß die Lichtgeschwindigkeit im Schwerefeld nur durch den Abstand vom Zentralkörper be-

1) Vgl. Anm. 1 auf vorhergehender Seite.

stimmt ist. Die Bewegung findet also so statt, als ob sie kräftefrei, aber in nichteuklidischem Raume vor sich ginge.

Aus Gleichung (6) wollen wir folgern, daß bei einer Zerlegung der Geschwindigkeit in eine radiale und dazu senkrechte Komponente, abweichend von der klassischen Mechanik die Gleichung besteht für die Lichtenergie:

$$(10) \quad E = \left[ \left( \frac{dr}{dt} \right)_0^2 + r^2 \left( 1 - \frac{2\mu}{rv_0^2} \right) \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)_0^2 \right] \left( 1 + \frac{\mu}{rv_0^2} \right).$$

## II. Die Lichtablenkung im Gravitationsfeld.

Da ein Lichtstrahl einen Energiestrom darstellt und deshalb auch einen Massenstrom, so wird er im Schwerfeld wie jede andere Masse abgelenkt werden. Man denke sich einen aus dem Unendlichen kommenden Lichtstrahl, der die Sonnenoberfläche streift. Um welchen Winkel wird er von seiner ursprünglichen Richtung abgelenkt werden? Seine Bewegung ist bestimmt durch Gleichung (10).

$$(11) \quad \left\{ \left( 1 + \frac{\mu}{rv_0^2} \right) \left[ \left( \frac{dr}{dt} \right)_0^2 + r^2 \left( 1 - \frac{2\mu}{rv_0^2} \right) \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)_0^2 \right] \right. \\ \left. = v_0^2 \left( 1 + \frac{\mu}{rv_0^2} \right) \right\}.$$

Zur Eliminierung von  $t$  benutzen wir den Flächensatz:

$$(12) \quad \text{Es ist: } \frac{r^2}{1} \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)_0 = L.$$

Eliminiert man  $t$  vermittelt dieser Gleichung und setzt  $x$  für  $\frac{1}{r}$ , so findet man

$$(13) \quad \left( \frac{dx}{d\varphi} \right)_0^2 + \left( 1 - \frac{2\mu x}{v_0^2} \right) x^2 = \frac{v_0^2}{L^2}.$$

Diese Gleichung läßt sich auch schreiben:

$$(14) \quad \left( \frac{dx}{d\varphi} \right)_0^2 = \left( \frac{v_0^2}{L^2} - x^2 \right) \left( 1 + \frac{2\mu x^2}{v_0^2 \left( \frac{v_0^2}{L^2} - x^2 \right)} \right).$$

$$\frac{dx}{\sqrt{\frac{v_0^2}{L^2} - x^2}} - \frac{\frac{\mu x^3}{v_0^2} dx}{\left( \frac{v_0^2}{L^2} - x^2 \right)^{\frac{3}{2}}} = d\varphi.$$

Dieser Ausdruck ist leicht zu integrieren und liefert:

$$\arcsin x \frac{L}{r} - \frac{\frac{2v_0^2}{L^2} - x^2}{\sqrt{\frac{v_0^2}{L^2} - x^2}} = \varphi.$$

$$(15) \quad x = \frac{v_0}{L} \sin \left( \varphi + \frac{\frac{2v_0^2}{L^2} - x^2}{\sqrt{\frac{v_0^2}{L^2} - x^2}} \right).$$

Nach dieser Gleichung wird  $x$  ein Maximum, wenn die rechte Seite den Wert  $\frac{v_0}{L}$  annimmt, dann ist  $r$  ein Minimum, d. h. gleich dem Sonnenradius  $R$ . Also  $R = \frac{L}{v}$ .

Geht der Strahl, aus dem Unendlichen kommend, den Sonnenrand streifend, nach dem Unendlichen zurück, so geht der Wert von  $x$  von null über  $1/R$  wieder auf null über. Setzt man in Gleichung (15)  $x$  gleich null, so wird

$$(16) \quad \varphi = -\frac{2\mu}{Lv} = -\frac{2\mu}{Rv^2}.$$

Wird  $x$  über den Wert  $1/R$  gehend nochmals null, so ist die Ablenkung doppelt so groß, da nach Gleichung (15) die durch das Perihel geteilten Kurvenstücke symmetrisch, d. h. kongruent sind. Die Totalablenkung  $\alpha$  beträgt daher

$$(17) \quad \alpha = \frac{4\mu}{Rv^2}.$$

Setzt man die Konstanten ein, so erhält man

$$\alpha = 1,7''.$$

### III. Die Perihelbewegung des Merkur.

Es ist das Verdienst Gerbers, auf Grund der Annahme, daß Gravitationswirkungen sich mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten, Berechnungen der Merkurbahn versucht zu haben. Er gelangt — allerdings vermittelt falscher Schlüsse — zu einer mit der Einsteinschen identischen Formel für die Perihelbewegung. Auf dieselbe fundamentale Grundlage stützen

sich die Versuche einer Berechnung unter Heranziehung der speziellen Relativitätstheorie. Streng genommen gehört die Planetenbewegung nicht in dieses Gebiet. Aber gewisse Ergebnisse dieser Theorie müssen doch annähernd auf die Planetenbewegung anwendbar sein. Diese Annahme erhält eine Stütze durch die Untersuchung der Gesetzmäßigkeiten kreisender Elektronen, bei denen ganz analoge Verhältnisse obwalten. A. Sommerfeld konnte nämlich, gestützt auf den von mir und anderen erbrachten Nachweis der Gültigkeit der relativistischen Massenformel aus der Feinstruktur gewisser Spektren schließen, daß die Masse des in elliptischen Bahnen sich bewegenden Elektrons tatsächlich gemäß dieser Formel veränderlich ist. Es ist natürlich unstatthaft, nun rückwärts aus den Berechnungen der Feinstruktur auf die Richtigkeit der Massenformel zu schließen. Hierzu fehlt die Theorie der kreisenden Elektronen.

Unter anderem war bei früheren Berechnungen der Perihelbewegung auf dieser Grundlage übersehen worden, daß die Bewegung des Beobachters eine Rolle spielt. Mit Unrecht findet man daher in der Literatur die Angabe, die spezielle Relativität liefere 7" in 100 Erdjahren.

Wir wenden uns nunmehr der Untersuchung der Merkurbewegung auf Grund unserer Hypothesen zu.

Diese Bewegung werde von einem außerhalb des Schwerfeldes befindlichen Beobachter wahrgenommen. Da wir zwischen den Massen der Lichtquanten und denen der gewöhnlichen Materie keinen prinzipiellen Unterschied machen, so gilt für die Bewegungsenergie der letzteren, analog (11):

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} & \left( 1 + \frac{\mu}{r v_0^2} \right) \left[ \left( \frac{dr}{dt} \right)_0^2 + r^2 \left( 1 - \frac{2\mu}{r v^2} \right) \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)_0^2 \right] \\ & = - \int_{\infty}^r \frac{2\mu}{r^2} \left( 1 + \frac{\mu}{r v_0^2} \right) dr - K. \end{aligned} \right.$$

Führt man die Integration aus, so ergibt sich bei etwas geändertem Werte von  $\mu$

$$(19) \quad \left( \frac{dr}{dt} \right)_0^2 + r^2 \left( 1 - \frac{2\mu}{r v_0^2} \right) \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)_0^2 = \frac{2\mu'}{r} \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{\mu}{r v_0^2} \right) - K.$$

Um  $t$  zu eliminieren, benutzen wir den Flächensatz:

$$(20) \quad r^2 \frac{d\varphi}{dt} = L.$$

und erhalten, indem wir noch  $x$  für  $\frac{1}{r}$  schreiben:

$$(21) \quad \left( \frac{dx}{d\varphi} \right)^2 + x^2 = \frac{2\mu x}{L^2} + \frac{2\mu x^3}{v_0^2} - \frac{\mu^2 x^2}{L^2 v_0^2} - K.$$

Das Ergebnis ist eine Perihelbewegung von 36'' in hundert Erdjahren.

Unsere Lösung bezieht sich, wie schon bemerkt, auf den Standort eines außerhalb des Gravitationsfeldes befindlichen Beobachters. Verlegen wir den ruhenden Standort in das Schwerfeld, etwa im Abstände  $\varrho$  des Erdradius von der Sonne, so sind die Überlegungen, die zur Gleichung (6) geführt haben, entsprechend zu ändern. Indem nämlich das Lichtquant nunmehr anstatt aus der Unendlichkeit herangebracht zu werden, aus der Entfernung  $\varrho$  auf den Abstand  $r$  gebracht wird, gewinnt man die maximale Arbeit  $\frac{\mu m}{r} - \frac{\mu m}{\varrho}$  und es ergeben sich die Beziehungen:

$$(22) \quad \begin{cases} n = n_{\varrho} \left( 1 - \frac{\mu}{r v_0^2} + \frac{\mu}{\varrho v_0^2} \right) \\ m = m_{\varrho} \left( 1 + \frac{\mu}{r v_0^2} - \frac{\mu}{\varrho v_0^2} \right). \end{cases}$$

Man sieht leicht, daß man anstatt der Gleichung (21) folgende erhält:

$$(23) \quad \left( \frac{d}{d\varphi} \frac{1}{r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} = \frac{2\mu}{r L^2} + \frac{2\mu}{r^3 v_0^2} - \frac{2\mu}{r^2 \varrho v_0^2} - \frac{\mu^2}{L^2 r^2 v_0^2} - K.$$

Behandelt man  $\varrho$  wegen der geringen Exzentrizität der Erdbahn als Konstante, so ergibt eine Lösung der Gleichung (23) den Wert von 30'',4 für 100 Erdjahre.

Ein im Abstände  $\varrho$  von der Sonne ruhender, d. h. an der Erdbewegung nicht teilnehmender Beobachter würde daher

eine kleinere Perihelbewegung messen müssen, und die Rotationsgeschwindigkeit würde ihm auch weniger verlangsamt erscheinen als dem außerhalb des Schwerfeldes befindlichen. Das läßt sich aus Gleichung (22) leicht verständlich machen, denn danach würden Lichtschwingungen, gemessen im Abstände  $\varrho$ , gegen solche, gemessen im Abstände  $r = \infty$ , verlangsamt erscheinen, und da die Atome, die die Lichtquanten emittieren, als Uhren aufgefaßt werden können, so müßten Uhren im Abstände  $\varrho$  langsamer gehen als solche im Abstände  $r = \infty$ .

Aus dieser Betrachtung können wir einen weiteren Schluß ziehen. Ein im Abstände  $\varrho$  ruhender Beobachter vergleiche seine Uhr mit einer im Abstände  $r$  des Merkur befindlichen, ebenfalls ruhenden. Er konstatiert, daß letztere im Verhältnis:

$$1 : \left( 1 - \frac{\mu}{r v_0^2} + \frac{\mu}{\varrho v_0^2} \right)$$

langsamer geht.

Nun läßt er letztere Uhr sich mit einer gewissen Geschwindigkeit, es sei die Erdgeschwindigkeit  $u_e$ , bewegen, dann geht diese Uhr gegen seine ruhende bekanntlich im Verhältnis  $1 : \sqrt{1 - \frac{u_e^2}{v_0^2}}$  langsamer. Dieselbe Uhr geht aber auch in diesem Verhältnis langsamer, wenn umgekehrt der Beobachter im Abstände  $\varrho$  sich mit der Geschwindigkeit  $u_e$  bewegt und die Uhr im Abstände  $r$  ruht. In letzterer Lage befindet sich ein Erdbewohner, der seine Uhr mit der im Abstände  $r$  vom Zentralkörper befindlichen vergleicht.

Seine Uhr geht langsamer im Verhältnis:

$$(24) \quad 1 : \left( 1 - \frac{\mu}{r v_0^2} + \frac{\mu}{\varrho v_0^2} \right) \sqrt{1 - \frac{u_e^2}{v_0^2}}$$

oder

$$1 : \left( 1 - \frac{\mu}{r v_0^2} + \frac{\mu}{\varrho v_0^2} - \frac{1}{2} \frac{u_e^2}{v_0^2} \right).$$

Anstatt der Beziehungen (22) hat man daher für einen beobachtenden Erdbewohner:



$$(24a) \quad \begin{cases} n = n'_e \left( 1 - \frac{\mu}{r v_0^2} + \frac{\mu}{\varrho v_0^2} - \frac{1}{2} \frac{u_e^2}{v_0^2} \right) \\ m = m'_e \left( 1 + \frac{\mu}{r v_0^2} - \frac{\mu}{\varrho v_0^2} + \frac{1}{2} \frac{u_e^2}{v_0^2} \right). \end{cases}$$

Nun ist:

$$(25) \quad \frac{u_e^2}{v_0^2} = \frac{2\mu}{\varrho v_0^2} - K.$$

Daher geht die Gleichung (24a) über in:

$$(26) \quad \begin{cases} n = n'_e \left( 1 - \frac{\mu}{r v_0^2} + K \right) \\ m = m'_e \left( 1 + \frac{\mu}{v_0^2 r} - K \right). \end{cases}$$

Vernachlässigen wir die kleine Exzentrizität der Erdbahn und behandeln  $\varrho$  wieder als Konstante, so nimmt  $K$  den Wert  $\frac{\mu}{\varrho v_0^2}$  an, wodurch die Gleichungen (26) übergehen in:

$$(27) \quad \begin{cases} n = n'_e \left( 1 - \frac{\mu}{r v_0^2} + \frac{\mu}{2 \varrho v_0^2} \right) \\ m = m'_e \left( 1 + \frac{\mu}{r v_0^2} - \frac{\mu}{2 \varrho v_0^2} \right). \end{cases}$$

Wir können nun das aus der Betrachtung der Uhren gewonnene Ergebnis auf das System Sonne—Merkur anwenden, und um die Analogie zu versinnbildlichen, können wir uns dieses System selbst als Uhr denken, dessen Zeiger der von der Sonne nach dem Merkur gezogene Radiusvektor ist. Verfahren wir dann ganz analog wie bei der Ableitung der Gleichungen (21) und (23), so erhalten wir:

$$(28) \quad \left( \frac{d \frac{1}{r}}{d \varphi} \right)^2 + \frac{1}{r^4} = \frac{2\mu}{r L^2} + \frac{2\mu}{r^3 v_0^2} - \frac{\mu}{r^3 \varrho v_0^2} - \frac{\mu}{r^3 v_0^2} - K.$$

Diese Gleichung liefert rund 33'' Drehung der Merkurbahn in 100 Erdjahren. Das Endresultat unserer Berechnung ergibt sich demgemäß um rund 3'' kleiner als das Einsteinsche.

Nach der allgemeinen Relativitätstheorie ist die Bahn eines materiellen Punktes eine geodätische Linie im Raum-

Zeitkontinuum, und als solche vom frei beweglichen Bezugssystem unabhängig. Das Ergebnis unserer Berechnung weist diese Invarianz nicht auf.

Überblicken wir das Ergebnis unserer Untersuchung, so erkennen wir, daß sich die Einwirkung des Schwerefeldes auf freie Bewegungen aus dem Fundamentalsatz der Quantentheorie, daß die Energie eines Lichtquants proportional seiner Frequenz sei, ableiten läßt. Hierbei haben wir noch die Verallgemeinerung eingeführt, daß die gewöhnliche Materie denselben Einflüssen unterworfen sei wie die Masse der Lichtquanten.

(Eingegangen 3. März 1922.)

**2. Beiträge zum Gesetze der Proportionalität  
von Trägheit und Gravität;  
von Roland v. Eötvös †, Desiderius Pekár  
und Eugen Fekete.**

Diese Abhandlung ist jene Bewerbungsschrift, welcher der erste Preis aus der Benckeschen Stiftung für das Jahr 1909 von der philosophischen Fakultät der Universität Göttingen zuerkannt wurde. Ihr Erscheinen war bis jetzt aus dem Grunde aufgeschoben, weil neue gleichartige Untersuchungen mit vervollkommenen Eötvösschen Drehwagen eine noch größere Genauigkeit versprochen haben. Neuerlich wurde aber die Eötvössche Drehwage in Ungarn zu praktischen Forschungen, zu Bergschürfungen verwendet, welche dann immer und immer, in größeren Rahmen ausgeführt, die Fortsetzung der oben erwähnten Untersuchungen verhindert haben. Mit Rücksicht aber auf das große Interesse, welches sich für die genauen experimentellen Resultate dieser Bewerbungsschrift — besonders wie für das Postulat der allgemeinen Relativitätstheorie von Einstein — kundtat, denken die Verfasser die Mitteilung dieses Aufsatzes der Öffentlichkeit nicht mehr vorzuenthalten zu wollen. Sie glauben damit auch der Absicht von Baron Roland v. Eötvös nachzukommen, der selbst schon die Veröffentlichung vorbereitete, an der Vollendung aber durch seinen am 8. April 1919 erfolgten Tod verhindert wurde. Das Original dieser Bewerbungsschrift hätte einen Umfang von beiläufig 10 Druckbogen, weshalb eine erhebliche Verkürzung der Abhandlung nötig war, ohne aber die Originalität der Arbeit verloren gehen zu lassen. So in erster Reihe wurden die Beobachtungen enthaltenden langen Tabellen und auch jene Teile ausgelassen, die das Wesen des Ganzen nicht beeinträchtigen.

**1. Die Aufgabe, wie sie hier aufgefaßt und behandelt wurde.**

Das Newtonsche Gesetz läßt sich folgenderweise aussprechen: Jeder kleinste Teil eines Körpers zieht jeden anderen solchen mit einer Kraft an, deren Richtung mit der Ver-

bindungslinie beider Teile zusammenfällt und deren Größe dem Produkt ihrer Massen direkt und dem Quadrat ihres Abstandes voneinander umgekehrt proportional ist. Sind also  $M$  und  $m$  die beiden Massenteile und  $r$  ihr Abstand, so ist die Größe ihrer gegenseitigen Anziehung

$$P = f \frac{M \cdot m}{r^2}.$$

Entsprechend den Prinzipien der Galilei-Newtonschen Mechanik ist dann die Beschleunigung des Massenteiles  $m$  gegen  $M$

$$\gamma = f \frac{M}{r^2}.$$

Proportionalität von Trägheit und Gravität ist also gleichbedeutend damit, daß  $f$  eine konstante Größe sei (Gravitationskonstante).

Es soll nun hauptsächlich durch Beobachtungen mit der Eötvösschen Drehwage erforscht werden, inwiefern die Gravitationserscheinungen dieser Forderung entsprechen.

Die Untersuchungen werden in dieser Arbeit nach zwei Richtungen geführt, erstens bezüglich der Frage, ob die gravitationelle Anziehung von der Beschaffenheit der Körper abhängig ist, zweitens bezüglich der mit dieser ersten eng verbundenen Frage, ob sich eine Beeinflussung der Anziehung eines Körpers durch die Anwesenheit anderer Körper fühlbar machen könne, ähnlich wie dies bei Wirkungen anderer Art der Fall ist, so bei den Erscheinungen der magnetischen und elektrischen Induktionen und insbesondere der Wärme- und Lichtabsorption.

Versuche mit radioaktiven Körpern sollen in einem besonderen Abschnitte dieser Schrift behandelt werden.

## 2. Über Beobachtungen zur Entscheidung der Frage, ob die Gravitation von der materiellen Beschaffenheit der Körper abhängig sei.

Vor allem haben wir hier der Beweisgründe zu gedenken, welche Newton selbst in seinen Prinzipien für die Proportionalität von Trägheit und Gravität verschiedener Körper anführt. Dieselben sind zweifacher Art: *astronomische*, die sich besonders auf die Bewegung der Jupitertrabanten beziehen, und *terrestrische*, die sich auf Beobachtungen des freien Falles

und der pendelnden Bewegung materiell verschiedener Körper stützen. Beide Arten der Beweisführung ergeben nach Newton als Resultat, daß, obwohl eine Verschiedenheit von nur  $\frac{1}{1000}$  der gravitationellen Anziehungskraft von verschiedenen Körpern gleicher Masse und gleicher Lage durch solche Beobachtungen erkannt werden müßte, die gravitationelle Anziehung von der substantiellen Beschaffenheit der Körper unabhängig zu sein scheint.

Der nach Newtons Zeiten sich unaufhaltsam entwickelnde Fortschritt in der Kunst der Beobachtung irdischer und himmlischer Bewegungen ermöglichte später auch eine verfeinerte Ausführung dieser seinem Gesetze zugrunde liegenden Untersuchungen. So wollen wir hier besonders auf die klassischen Pendelbeobachtungen Bessels hinweisen, durch welche die Grenze einer immerhin noch möglichen Verschiedenheit der Anziehung verschiedener Körper von  $\frac{1}{1000}$  auf  $\frac{1}{60000}$  verschoben wurde.

Noch viel beträchtlicher, bis zu  $\frac{1}{20000000}$ , wurde diese Grenze in neuerer Zeit durch die Untersuchungen von Eötvös herabgesetzt, der unser empfindlichstes Instrument, die Drehwage, sich zu diesem Zwecke dienstbar gemacht hatte. Die Methode und die Resultate dieser Untersuchung sind nur in einer kurzen Notiz im 8. Bande der naturwissenschaftlichen Berichte aus Ungarn vom Jahre 1890 bekannt gemacht, so daß wir es für notwendig halten, das dort nur kurz Angedeutete hier etwas eingehender zu entwickeln.

Die Schwerkraft betrachten wir als Resultante zweier im allgemeinen ungleich gerichteten Kräfte, deren eine aus der Massenanziehung, deren andere aus der Trägheit der Körper entspringt. Beobachtungen betreffend die Richtung der Schwerkraft verschiedener Körper können also zur Erforschung des Verhältnisses dienen, in dem ihre Trägheit und Gravität zueinander stehen.

Die erste der Massenanziehung entsprechende Schwerkraftskomponente einer Masseneinheit im Punkte  $P$  wird durch das Integral ausgedrückt

$$G = f \int \frac{dm}{r^2},$$

die zweite der Trägheit entspringende Komponente, d. i. die Zentrifugalkraft, durch

$$C = l \omega^2.$$

Die Bezeichnungen sind hier:  $dm$  für ein anziehendes Massenelement,  $\varrho$  für die Entfernung desselben von  $P$ ,  $f$  für die Gravitationskonstante,  $l$  für die Entfernung von  $P$  von

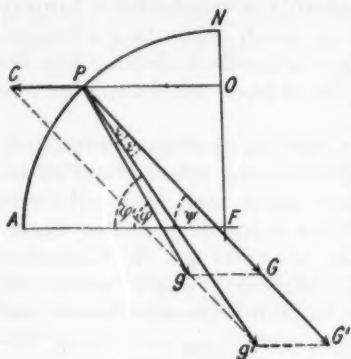


Fig. 1.

der Drehungsachse der Erde,  $\omega$  für die Winkelgeschwindigkeit der Erddrehung. Fig. 1 gibt ein Bild dieser beiden Komponenten durch die Geraden  $PG$  und  $PC$ , auch ist da die Resultante dieser, d. i. die ganze Schwerkraft, durch die Gerade  $Pg$  ihrer Größe und Richtung nach angegeben. Diese Fig. 1 zeigt uns auch, daß die Richtung der Anziehungskraft  $G$  von der Richtung der Schwerkraft  $g$  auf der nördlichen

Hemisphäre nach Norden um den Winkel  $\varepsilon$  abweicht. Ihre Größe, welche von der geographischen Breite  $\varphi$  abhängig, läßt sich folgenderweise berechnen.

Die Gesamtkraft im Punkte  $P$  fällt in die Lotrichtung und ist:

$$(1) \quad g = G \cos \varepsilon - C \cos \varphi,$$

in der tangierenden Ebene halten sich dagegen die Komponenten von  $C$  und  $G$  im Punkte  $P$  das Gleichgewicht, so daß

$$(2) \quad C \sin \varphi = G \sin \varepsilon$$

und somit

$$(3) \quad \operatorname{tg} \varepsilon = \frac{C \sin \varphi}{g + C \cos \varphi}.$$

Wenn wir nun im Rahmen dieser Untersuchung die Möglichkeit zulassen, daß die Anziehung von Körpern gleicher Masse aber verschiedener Beschaffenheit eine verschiedene sei, so sind die Größen  $G$  und  $f$  und infolgedessen auch  $g$  und  $\varepsilon$  als von dieser Beschaffenheit abhängig zu betrachten. Wir können dann auch nicht kurzweg von der Schwere reden, auch nicht von einer einzigen durch einen Punkt gelegten Niveaufläche, sondern müssen verschiedene Schweren und verschiedene Niveauflächen je nach der Art der schweren Körper unterscheiden.

Am zweckmäßigsten scheint es zu sein, die Schwerkraftsverhältnisse einer Normalsubstanz festzustellen, und jene der anderen durch ihre Abweichung von diesen zu kennzeichnen. Als solche Normalsubstanz diene beispielsweise das Wasser.

Von größter Wichtigkeit für unsere Betrachtungen ist die dieser Auffassung entsprechende Verschiedenheit der Richtung der Schwerkraft verschiedener Körper. Setzen wir für einen Körper

$$C \sin \varphi = G \sin \varepsilon$$

und für einen anderen

$$C \sin \varphi' = G' \sin \varepsilon',$$

so können wir, da die Richtungen der Anziehungskräfte  $G$  und  $G'$  die gleichen sind, also unserer Figur entsprechend

$$\varphi = \psi + \varepsilon \quad \text{und} \quad \varphi' = \psi + \varepsilon'$$

den Winkel

$$\varepsilon' - \varepsilon = \varphi' - \varphi$$

berechnen, den die Richtungen ihrer Schweren bilden.

In Anbetracht, daß dieser Winkel gewiß sehr klein ist, erhalten wir

$$(4) \quad \varepsilon' - \varepsilon = \varphi' - \varphi = - \frac{G' - G}{G \cos s - C \cos \varphi} \sin \varepsilon.$$

Mit Berücksichtigung der Gleichung (1) wird dann

$$\varepsilon' - \varepsilon = \varphi' - \varphi = - \frac{G' - G}{g} \sin \varepsilon.$$

Bezieht sich nun  $G$  auf die Normalsubstanz (Wasser) und setzen wir

$$G' = G (1 + \kappa),$$

dann folgt:

$$(5) \quad \varepsilon' - \varepsilon = \varphi' - \varphi = - \frac{G}{g} \kappa \sin \varepsilon.$$

Hiermit erlangt die Größe  $\kappa$  die Bedeutung eines spezifischen Attraktionskoeffizienten, denn es ist

$$\frac{G'}{G} = \frac{f'}{f},$$

also

$$f' = f (1 + \kappa).$$

Die Pendelversuche Newtons besagten eben, daß  $\kappa$  kleiner als  $\frac{1}{1000}$ , die Bessels, daß  $\kappa$  kleiner als  $\frac{1}{60\,000}$ , die von Eötvös, daß  $\kappa$  kleiner als  $\frac{1}{20\,000\,000}$  sei.

Zur Erläuterung unserer folgenden Betrachtungen wollen wir noch den Ablenkungswinkel  $\eta$  einführen, den die Richtung der Schwere einer beliebigen Substanz mit jener der Normalsubstanz (Wasser) nach den Polen zu bildet, also in der nördlichen Hemisphäre nach Norden. Da

$$\eta = \varepsilon - \varepsilon',$$

so schreiben wir

$$(6) \quad \eta = \frac{G}{g} \alpha \sin \varepsilon.$$

Überlegen wir nun, in welcher Weise sich eine solche Verschiedenheit der Schwerkraft verschiedener Körper fühlbar machen müßte. Vor allem drängt sich uns die Folgerung auf, daß Lotsenkel aus verschiedenen Substanzen und Flüssigkeiten verschiedener Art in ihrem Ruhezustande verschiedene Richtungen der Vertikale angeben würden. Das Lot wäre dann im allgemeinen auch nicht normal auf die ruhende Flüssigkeitsfläche.

Dieser Richtungsunterschied beträgt unter dem 45. Breitengrade

für $\alpha = 1/1000$	0,375 Sek.,
für $\alpha = 1/60000$	0,00595 Sek.,
für $\alpha = 1/20000000$	0,000018 Sek.

Überraschend genug ist es schon, daß so kleine Richtungsunterschiede ausreichend sind, um mechanische Antriebe zu bewirken, welche wahrgenommen und mit Hilfe der Drehwage auch gemessen werden können.



Fig. 2.

Besteht das Gehänge der Drehwage aus Massen verschiedener Materiale  $m_1, m_2, m_3$  usw., so müßte infolge unserer Betrachtungen die durch den Meßdraht dargestellte Drehungsachse von der Richtung der Schwere des Wassers um einen Winkel  $E$  nach dem Pole abweichen, der leicht zu berechnen ist. Betrachten wir nämlich die Gleichgewichtsbedingungen eines solchen Gehänges um eine westöstlich gerichtete horizontale Achse  $O$  (Fig. 2), so erhalten wir für das Drehungsmoment der Schwere eines homogenen Massenteiles  $m_1$  die Größe:

$$-m_1 \varrho_1 g_1 \sin (\gamma_1 - \eta_1)$$

und als Gleichgewichtsbedingung:

$$\sum m_n \varrho_n g_n \sin (\gamma_n - \eta_n) = 0,$$



wo  $\varrho_n$  den Drehungshalbmesser des Schwerpunktes der Masse  $m_n$ , und  $\gamma_n$  den Winkel bedeutet, den  $\varrho_n$  mit der Richtung der Wasserschwere einschließt;  $g_n$  ist die Schwere der Masseneinheit von  $m_n$ , und  $\eta_n$  die Abweichung ihrer Richtung von der der Wasserschwere.

Annähernd setzen wir nun:

$$\begin{aligned}\cos \eta_n &= 1 \\ \sin \eta_n &= \eta_n \\ g_n &= g (1 + \kappa),\end{aligned}$$

erhalten dann

$$\Sigma m_n \varrho_n g \sin \gamma_n + \Sigma m_n \varrho_n g (\kappa \sin \gamma_n - \eta_n \cos \gamma_n) = 0,$$

und mit  $M$  die Masse des ganzen Gehänges, mit  $R$  den Drehungshalbmesser ihres Schwerpunktes bezeichnend

$$M R g \sin E + \Sigma m_n \varrho_n g (\kappa \sin \gamma_n - \eta_n \cos \gamma_n) = 0,$$

woraus ersichtlich, daß  $E$  stets ein kleiner Winkel bleibt, der die Ordnung von  $\kappa$  und  $\eta_n$  nicht übersteigen kann.

In der Drehungsebene der Drehwage wirkt daher auf jeden Massenteil  $m_n$  eine nach dem Pole gerichtete Schwerkraftskomponente, welche ausgedrückt werden kann durch

$$m_n g_n (\eta_n - E).$$

Wir wollen nun unsere weiteren Rechnungen auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem beziehen, dessen Z-Achse mit der Drehungsachse (Meßdraht) zusammenfällt und nach unten gerichtet ist, während die X-Achse nach Norden, die Y-Achse nach Osten gerichtet seien. Das aus den vorher betrachteten Richtungsabweichungen entspringende Drehungsmoment der Schwere ist dann

$$- \Sigma m_n g_n y_n (\eta_n - E) = - \Sigma m_n g_n y_n \eta_n + E \Sigma m_n g_n y_n;$$

da aber infolge des Gleichgewichtes um die X-Achse

$$\Sigma m_n g_n y_n = 0,$$

so beschränkt sich dieses Drehungsmoment auf das erste Glied:

$$- \Sigma m_n g_n y_n \eta_n.$$

An den Drehwagen, welche hier benutzt wurden, waren die verschiedenen Massen längs eines geraden Stabes angebracht. Das eine Ende des Stabes wollen wir mit  $a$ , das andere

mit  $b$  bezeichnen und setzen dann  $m_a$ ,  $l_a$ ,  $g_a$  und  $\eta_a$  bezüglich jener Massen, welche von der Drehungsachse ab bis zum Ende  $a$  liegen. Ähnliche Bezeichnungen sollen für die andere Stabhälfte  $b$  gelten. Führen wir dann noch zur Bezeichnung des Winkels, den die von  $b$  nach  $a$  gerichtete Stabsachse mit der nach Norden gerichteten X-Achse in der Richtung des Uhrzeigers bildet, das Zeichen  $\alpha$  mit dem Namen Azimuth des Stabes ein, so erhalten wir das frühere Drehungsmoment in der Form

$$(\Sigma m_b l_b g_b \eta_b - \Sigma m_a l_a g_a \eta_a) \sin \alpha$$

und mit Benützung der Gleichung (6) ergibt sich dann dasselbe bei Vernachlässigung der mit  $\kappa^2$  multiplizierten Glieder

$$(7) \quad D = (\Sigma m_b l_b \kappa_b - \Sigma m_a l_a \kappa_a) G \sin \varepsilon \sin \alpha.$$

Die Größe dieses eventuellen Drehungsmomentes sei durch ein Beispiel erläutert.

Mögen an beiden Enden eines 40 cm langen homogenen Stabes zwei Massen verschiedener Substanz von je 25 g hängen. Unter dem 45. Breitengrade, wo

$$G \sin \varepsilon = 1,7$$

ist, dann im Falle, daß das  $a$ -Ende des Stabes nach Osten weist

$$D = 25 \cdot 20 \cdot 1,7 (\kappa_b - \kappa_a) = 850 (\kappa_b - \kappa_a),$$

wenn aber das Ende  $a$  nach Westen zeigt

$$D' = -850 (\kappa_b - \kappa_a),$$

also

$$D - D' = 1700 (\kappa_b - \kappa_a).$$

Wäre  $(\kappa_b - \kappa_a) = 10^{-6}$ , so ergäbe sich

$$D - D' = 0,0017$$

und dieses Drehungsmoment würde an einem Drahte, dessen Torsionskonstante 0,5 und dabei doch die geforderte Tragfähigkeit besitzen kann, eine Drillung bewirken, welche in der Entfernung von 1500 Skalenteilen abgelesen, in Skalenteilen ausgedrückt

$$n - n' = \frac{0,0017}{0,5} 3000 = 10,2 \text{ Skalenteile.}$$

Gar so einfach ist aber die Sache doch nicht. Die Drillung des Meßdrahtes wird nämlich nicht allein durch das soeben

berechnete Drehungsmoment  $D$  bewirkt, sondern auch durch jenes Drehungsmoment, welches von den räumlichen Veränderungen der Schwerkraft herrührt. In geschlossenen Beobachtungsräumen, namentlich in kellerartigen Lokalen kann das letztere sogar recht bedeutend werden.<sup>1)</sup>

Für ein Gehänge, wie es Fig. 3 darstellt, welches aus einer horizontalen Röhre besteht, die am Ende  $b$  durch ein hineingeschobenes Gewicht  $M_b$ , am Ende  $a$  aber durch ein aufgehängtes Gewicht  $M_a$  so belastet ist, daß der Schwerpunkt von  $M_a$  um  $h$  tiefer als der des Gewichtes bei  $b$  liege, findet Eötvös das durch die Variationen der Schwerkraft hervorgerufene Drehungsmoment

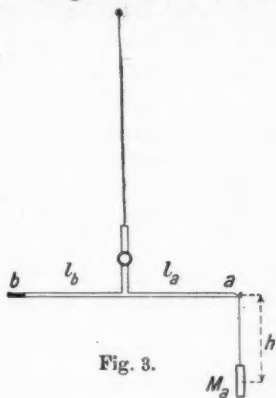


Fig. 3.

$$F = \left( \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) K \frac{\sin 2\alpha}{2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} K \cos 2\alpha - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} M h l \sin \alpha + \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} M h l \cos \alpha.$$

$U$  bedeutet hier das Schwerkraftspotential,  $K$  das Trägheitsmoment des Gehänges. Da nun das gesamte Drehungsmoment der auf das Gehänge wirkenden Schwerkraften

$$D + F,$$

so ist der Torsionswinkel  $\vartheta$ , entsprechend der Drillung des Drahtes in der Gleichgewichtslage:

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} \vartheta = & \frac{1}{2} \frac{K}{\tau} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) \sin 2\alpha + \frac{K}{\tau} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \cos 2\alpha \\ & - \frac{M_a h l}{\tau} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} \sin \alpha + \frac{M_a h l}{\tau} \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} \cos \alpha \\ & + \frac{1}{\tau} \{ \sum m_b l_b x_b - \sum m_a l_a x_a \} G \sin \epsilon \sin \alpha, \end{aligned} \right.$$

$\tau$  bedeutet hier die Torsionskonstante.

1) R. v. Eötvös, Bestimmung der Gradienten der Schwerkraft und ihrer Niveaulächen mit Hilfe der Drehwaage. Verhandlungen der XV. Allgemeinen Konferenz der Erdmessung in Budapest. 1906. Bd. I. S. 337–395.

Bei der Feststellung dieser Gleichung (8) sind die auch mit Rücksicht auf das letzte Glied verschwindend kleinen Veränderungen vernachlässigt worden, welche die zweiten Differentialquotienten des Potentials  $U$  infolge verschiedener Anziehung verschiedener Substanzen erleiden könnten. Wohl ist zu beachten, daß die Größe

$$\Sigma m_b l_b - \Sigma m_a l_a$$

hier nicht mehr strengere als gleich Null betrachtet werden darf, doch bleibt dieselbe von der Ordnung der Größe

$$\Sigma m_b l_b \kappa_b - \Sigma m_a l_a \kappa_a,$$

da für das Gleichgewicht um eine horizontale Achse

$$\Sigma m_b l_b g_b - \Sigma m_a l_a g_a = 0$$

sein muß und das Verhältnis  $g_b/g_a$  nur um einen Bruchteil  $\lambda$  von der Einheit verschieden ist, der von derselben Ordnung wie  $\kappa$  ist.

Für das Drehwagengehänge oben beschriebener Art können wir im Falle, daß die Röhre an beiden Seiten gleich lang, homogen und überall von gleicher Stärke ist, setzen:

$$\Sigma m_b l_b \kappa_b - \Sigma m_a l_a \kappa_a = M_b l_b \kappa_b - M_a l_a \kappa_a,$$

also mit Vernachlässigung des mit  $\lambda \kappa_b$  multiplizierten Gliedes

$$(8') \quad \Sigma m_b l_b \kappa_b - \Sigma m_a l_a \kappa_a = M_a l_a (\kappa_b - \kappa_a).$$

Die Gleichungen (8) und (8') werden uns später den Weg anweisen, wie durch Elimination aller anderen Unbekannten die Größen  $(\kappa_b - \kappa_a)$  mit Hilfe von Beobachtungen bestimmt werden können und so die Frage gelöst werden kann, ob ihr Wert die Grenze des Meßbaren erreicht.

Solche Versuche nach der Methode von Eötvös geben uns aber nur Aufklärung über die Anziehung eines einzigen Körpers, nämlich der Erde. Gewiß ist es von Interesse zu untersuchen, ob nicht auch die Anziehungen von Sonne und Mond, die ja in den Fluterscheinungen und in den Richtungsänderungen des Lotes tatsächlich fühlbar werden, mit zur Aufklärung unserer Frage beitragen könnten? In kurzer annähernder Behandlung des so komplizierten Flutphänomens wollen wir hierauf Antwort geben.

Die sogenannte fluterzeugende Kraft können wir aus zwei Komponenten zusammensetzen.

Eine dieser Komponenten ist die Anziehung, welche Sonne oder Mond auf ein Massenteilchen auf der Erde ausübt; ihre Größe, bezogen auf die Masseneinheit, wird unter Annahme eines baryzentrischen anziehenden Körpers:

$$f \frac{M}{\varrho^2},$$

wo  $M$  die Masse von Sonne oder Mond,  $\varrho$  die Entfernung von ihrem Anziehungszentrum bedeutet. Diese Kraft, welche für verschiedene Massenteile der Erde schon wegen ihrer verschiedenen Lage ungleich groß und ungleich gerichtet ist, wollen wir hier auch noch als von der substantiellen Beschaffenheit, also von  $\kappa$  abhängig betrachten.

Die zweite hier mitwirkende Kraftkomponente ist die der Trägheit entsprechende Zentrifugalkraft jener kreisenden Bewegung, welche die Erde um den Trägheitsmittelpunkt der Sonne und der Erde bzw. des Mondes und der Erde beschreibt. Diese ist für jedes Teilchen der von ihrer Achsendrehung befreiten Erde gleich groß und gleich gerichtet, wir wollen sie, auf die Masseneinheit bezogen, mit  $C$  bezeichnen.

Da die auf die ganze Erde ausgeübte Anziehung und die Zentrifugalkraft ihrer ganzen Masse gleich groß sein müssen, so setzen wir

$$C = f_0 \frac{M}{D^2},$$

wo  $D$  die Entfernung des Trägheitsmittelpunktes der Erde vom gemeinschaftlichen Trägheitsmittelpunkte von Sonne und Erde bzw. von Mond und Erde bedeutet. Das Zeichen  $f_0$  bezeichnet hier einen Mittelwert der für verschiedene Substanzen der Erde eventuell verschiedenen Werte von  $f$ .

Diesen Betrachtungen entsprechend und unter Annahme einer kugelförmigen Erde erhalten wir dann als Komponenten der auf ein irdisches Koordinatensystem bezogenen Kräfte:



Fig. 4.

eine nach oben gerichtete vertikale Kraft (Fig. 4)

$$-Z = f \frac{M}{D^2} \cos \zeta - C \cos \zeta + f M \frac{a}{D^3} (2 \cos^2 \zeta - \sin^2 \zeta)$$

und eine horizontale Kraft

$$H = f \frac{M}{D^2} \sin \zeta - C \sin \zeta + \frac{3}{2} f M \frac{a}{D^3} \sin 2\zeta.$$

In diesen Gleichungen bedeutet  $\zeta$  die Zenithdistanz von Sonne oder Mond,  $a$  den mittleren Halbmesser der Erde,  $H$  ist nach jenem Punkte des Horizontes gerichtet, in dem die Vertikalebene von Sonne oder Mond den Horizont schneidet, und für welchen  $\zeta = +\frac{\pi}{2}$  ist.

Die hier angeführte annähernde Berechnung durch eine vollständigere zu ersetzen, würde den Rahmen dieser Abhandlung übersteigen.

Setzen wir

$$f = f_0 (1 + \kappa),$$

so wird

$$(9) \quad -Z = \kappa f_0 \frac{M}{D^2} \cos \zeta + f M \frac{a}{D^3} (2 \cos^2 \zeta - \sin^2 \zeta),$$

$$(10) \quad H = \kappa f_0 \frac{M}{D^2} \sin \zeta + \frac{3}{2} f M \frac{a}{D^3} \sin 2\zeta.$$

Wenn  $\kappa = 0$ , so sind dies die gewöhnlichen, die flut-erzeugende Kräfte darstellenden Kraftkomponenten (vgl. z. B. Thomson-Tait, Handbuch der Theoret. Physik, Bd. I, § 812).

Wenn aber  $\kappa$  von Null verschieden wäre, so müßte neben der von den zweiten Gliedern unserer Gleichungen bedingten halbtägigen Fluterscheinung auch eine solche von der Periode eines ganzen Tages eintreten, die den ersten Gliedern entspräche.

Wenn  $\zeta = 0$ , so wird

$$-Z = \kappa f_0 \frac{M}{D^2} + 2f \frac{M}{D^2} \frac{a}{D}$$

und wenn  $\zeta = \pi$ , so wird

$$-Z = -\kappa f_0 \frac{M}{D^2} + 2f \frac{M}{D^2} \frac{a}{D}.$$

Die Gleichungen (9) und (10) lassen sich für Beobachtungen mit der Drehwaage sehr gut verwerten. Stellen wir nämlich eine Drehwaage von der früher beschriebenen Art so auf, daß das Azimuth des Stabes  $\alpha = 0$  sei, also die Stabachse im Meridiane liege und ihr Ende  $a$  nach Norden zeige, so wirken auf dieselbe zwei äußere Drehungsmomente. Das eine rührt von der Erdschwere her, und bewirkt eine zeitlich unveränderliche Drillung  $\vartheta_0$  des Drahtes, das zweite entspricht der von

der Zeit abhängigen Kraft  $H$ , deren Größe durch die Gleichung (10) gegeben ist.

Wenn  $A$  das Azimuth der Sonne oder des Mondes bedeutet, so ist die auf die Stabachse normale Komponente der Kraft  $H$  gleich  $-H \sin A$ , und wir erhalten für die Drillung des Meßdrahtes

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} \vartheta &= \vartheta_0 - \frac{1}{\tau} f_0 \frac{M}{D^2} \{ \Sigma m_a l_a x_a - \Sigma m_b l_b x_b \} \sin \zeta \sin A \\ &\quad - \frac{3}{2} \frac{1}{\tau} f_0 \frac{M}{D^2} \frac{a}{D} \{ \Sigma m_a l_a - \Sigma m_b l_b \} \sin 2\zeta \sin A \\ &\quad - \frac{3}{2} \frac{1}{\tau} f_0 \frac{M}{D^2} \frac{a}{D} \{ \Sigma m_a l_a x_a - \Sigma m_b l_b x_b \} \sin 2\zeta \sin A. \end{aligned} \right.$$

Das letzte Glied des zur rechten Seite dieser Gleichung stehenden Ausdruckes kann wegen des Faktors  $a/D$  vernachlässigt werden, ebenso auch das vorangehende Glied, weil

$$\Sigma m_a l_a - \Sigma m_b l_b$$

von derselben Größenordnung ist, wie

$$\Sigma m_a l_a x_a - \Sigma m_b l_b x_b,$$

so daß näherungsweise die Formel benützt werden darf:

$$(12) \quad \vartheta = \vartheta_0 - \frac{1}{\tau} f_0 \frac{M}{D^2} \{ \Sigma m_a l_a x_a - \Sigma m_b l_b x_b \} \sin \zeta \sin A.$$

An einem Beispiele können wir uns nun über die Größe und Meßbarkeit dieser Drillung Aufklärung verschaffen. Benützen wir das im vorangehenden Beispiele beschriebene Instrument, für welches

$$\Sigma m_a l_a x_a - \Sigma m_b l_b x_b = M_a l_a (x_a - x_b)$$

gesetzt werden kann, und

$$M_a = 25 \text{ g}; \quad l_a = 20 \text{ cm}; \quad \tau = 0,5.$$

Es sei ferner

$$\text{für die Sonne: } f_0 \frac{M}{D^2} = 0,586,$$

$$\text{für den Mond: } f_0 \frac{M}{D^2} = 0,00332.$$

Dann erhalten wir die der Sonnenanziehung entsprechende Drillung

$$\vartheta = \vartheta_0 - 586 (x_a - x_b) \sin \zeta \sin A,$$

die der Mondanziehung entsprechende:

$$\vartheta = \vartheta_0 - 3,32 (x_a - x_b) \sin \zeta \sin A.$$

Wir wollen uns hauptsächlich nur mit der ersten weiter beschäftigen, da die zweite wegen ihres vielfach kleineren Wertes neben dieser kaum von Belang ist.

Wenn  $(\kappa_a - \kappa_b)$  von Null verschieden und positiv wäre, also wenn die Masseneinheit der am Nordende des Stabes hängenden Masse  $M_a$  von der Sonne stärker angezogen würde als die Masseneinheit von  $M_b$ , so müßte der Drehwagebalken eine tägliche Schwankung zeigen, derart, daß ihr  $a$ -Ende bei Sonnenaufgang nach Osten, bei Sonnenuntergang nach Westen von der Mittellage abweichen würde.

Die Größe dieser Elongation ist, da für Sonnenaufgang und Sonnenuntergang  $\sin \zeta = 1$ ,

$$\vartheta - \vartheta' = 586 (\kappa_a - \kappa_b) (\sin A' - \sin A)$$

und für den Fall, daß

$$\sin A' - \sin A = 2,$$

wie dies zur Zeit der Tag- und Nachtgleiche annähernd zutrifft,

$$\vartheta - \vartheta' = 1172 (\kappa_a - \kappa_b)$$

oder in Teilchen einer Skala in der Entfernung von 1500 Skalenteilen

$$n - n' = 3516000 (\kappa_a - \kappa_b).$$

Für  $(\kappa_a - \kappa_b) = 1 \cdot 10^{-6}$  würde sich daher eine Elongation von

$$n - n' = 3,5$$

ergeben.

Die Empfindlichkeit eines auf diese Betrachtungen gegründeten Beobachtungsverfahrens ist also etwa nur ein Drittel der von Eötvös angegebenen, solange nämlich dasselbe Instrument benützt wird. Trotzdem verspricht dieses neue Verfahren manche Vorteile, da es sich auf Beobachtungen an einem stabilen Instrumente stützt, und somit ein solches von viel größerer Empfindlichkeit benützt werden kann. Der Eötvös'sche Gravitationskompensator<sup>1)</sup> erlaubt ja bei Ausschluß störender Einflüsse die Empfindlichkeit solcher stabilen Drehwage bis zu einer beliebigen Grenze zu steigern.

Beide Verfahren ergänzen sich übrigens in der Weise, daß das erste über die Anziehung der Erde, das zweite über die Anziehung der Sonne den gewünschten Aufschluß erteilt.

1) R. v. Eötvös, Untersuchungen über Gravitation und Erdmagnetismus. Wied. Ann. 59, S. 392, 1896.



### 8. Näheres über die Ausführung von Beobachtungen nach der von Eötvös angegebenen Methode.

Benutzt wurden zwei Instrumente derselben Art, wie sie Eötvös bei seinen Untersuchungen lokaler Schwerevariationen benützt und im ersten Bande der Abhandlungen der XV. Allgemeinen Konferenz der Erdmessung (1906) beschrieben hat. Es sind dies Drehwagen von großer Empfindlichkeit, welche um eine vertikale Achse drehbar, also für die hier behandelten Untersuchungen eben geeignet sind. Im Rahmen dieser verkürzten Abhandlung können wir eine ausführliche Beschreibung der Instrumente nicht geben, doch zeigen wir in der Fig. 5 den Querschnitt einer einfachen Eötvösschen Drehwage und in den Figg. 6 und 7 die älteren Modelle des einfachen und doppelten Schwerevariometers, wie diese beiden Instrumente jenerzeit von uns gebraucht wurden.

Die Betrachtungen des vorangehenden Abschnittes, welche als theoretische Grundlage der auszuführenden Versuche dienen sollen, setzen voraus, daß das Drehwagegehänge keinen anderen Einwirkungen unterworfen sei, als jenen der Trägheit und der gravitationellen Anziehung außer der Drehwage gelegener Massen einerseits, der Torsion entgegenwirkenden elastischen Kraft des Drahtes andererseits.

Ein solch vollkommener Ausschluß aller anderen Wirkungen, dem die Kenntnis der gesamten Naturkräfte vorangehen müßte, ist dem Menschen wohl unerreichbar, doch sollen wenigstens jene störenden Einwirkungen nach Möglichkeit vermieden werden, die uns bis zu einem gewissen Grade bekannt sind.

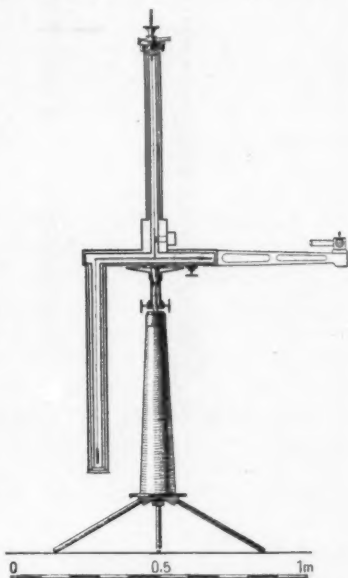


Fig. 5.

Die hauptsächlichsten dieser Einwirkungen wollen wir der Reihe nach anführen und auch angeben, wie wir sie für unsere Beobachtungen unschädlich machten.

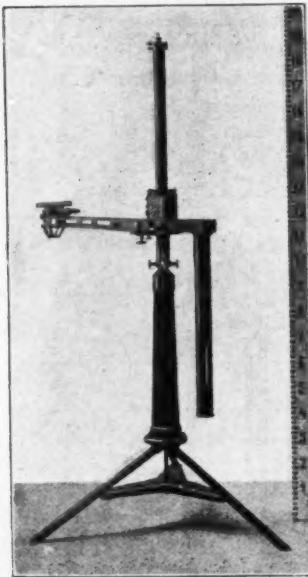


Fig. 6.

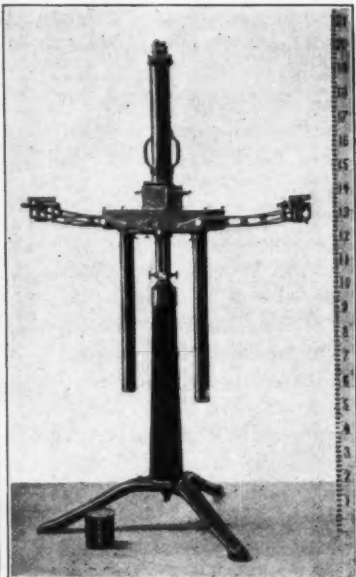


Fig. 7.

*Magnetische Kräfte*, insbesondere die erdmagnetische Kraft, müssen sich fühlbar machen, wenn das Gehänge remanent magnetische Teile enthält. Ein Teilchen von nur  $\frac{1}{1000}$  C.G.S. magnetischem Momente, wie etwa ein Splitter eines guten Stahlmagneten von nicht mehr als  $\frac{1}{50}$  mg Gewicht, könnte beim Umdrehen der Drehwage störende Verschiebungen von zwei ganzen Skalenteilen verursachen. Durch sorgfältige Wahl der Stücke, aus denen das Gehänge zusammengefügt wird, ist es wohl möglich ein solches Gehänge zu erhalten, welches trotz dieser großen Empfindlichkeit als unmagnetisch gelten kann; doch muß namentlich bei unseren Versuchen, wo die hängenden Teile wiederholt mit neuen vertauscht wurden, diesem Übelstande auch noch auf andere Weise vorgebeugt werden.

Wir kompensierten deshalb die horizontale Komponente der erdmagnetischen Kraft derart, daß im Raume jedes Instrumentes  $H$  nahezu gleich Null gemacht wurde, wozu permanente Magnete und Elektromagnete dienten.

Dasselbe können wir auch bezüglich der *elektrostatischen Wirkungen äußerer Körper* behaupten, deren Einfluß auf unsere Drehwage durch die dreifache Metallhülse des Gehäuses als vollständig aufgehoben betrachtet werden darf.

Zu berücksichtigen haben wir dagegen die *elektrostatischen Kräfte zwischen dem Gehänge und dem ihn umschließenden Gehäuse*, die ja nicht aus gleichem Materiale bestehen. Wenn die Oberfläche der einzelnen Teile des Gehänges und die umgebenden Wände des Gehäuses verschiedene elektrische Ladungen besitzen, so entstehen elektrostatische Kräfte, die in einer symmetrischen Mittelstellung wohl gleich Null sein können, aber bei jeder Abweichung von einer solchen fühlbar werden. Diese Kräfte müssen sich demnach besonders in der Weise zu erkennen geben, daß sie die Empfindlichkeit des Instrumentes beeinflussen, also bedingen, daß das gegen die Schwerkraft wirkende Drehungsmoment  $\tau \vartheta$  ein anderes  $\tau' \vartheta$  wird. Um diesen verschiedenen elektrischen Ladungen verschieden gearteter Oberflächenteile vorzubeugen, versahen wir sie alle mit einem gleichmäßigen Rußüberzuge. Auch haben wir ein Beobachtungsverfahren ersonnen, dessen Resultate von kleinen Verschiedenheiten der Größe  $\tau'$  unbeeinflusst bleiben.

Die direkten Einwirkungen der Bestrahlung durch äußere Körper sind uns nicht zur Genüge bekannt. Die mehrfache Metallwand des Gehäuses dient aber dazu, den Einfluß dieser unbekannten auf ein Minimum zu reduzieren.

Wirkungen, die von dem Temperaturunterschiede verschiedener Teile des Gehäuses und des Gehänges herrühren. Die äußeren Temperaturänderungen, in deren Gefolge dem Instrumente durch Strahlung und Leitung Wärme zugeführt und ihr abgenommen wird, bewirken eine Ungleichheit der Temperatur seiner Teile und der eingeschlossenen Luft. Die mehrfache Metallhülle des Gehäuses dient dazu, diese Ungleichheit möglichst klein zu machen; das gleiche bezweckt auch der Rußüberzug sämtlicher inneren Teile, von dem früher Erwähnung geschah.

*Temperaturänderungen des Drahtes* können, wenn sie klein und von langsamem Verlaufe sind, mit einem individuellen Koeffizienten in Rechnung gezogen werden oder bei entsprechender Wahl des Beobachtungsverfahrens auch außer acht gelassen werden.

*Erschütterungen* sind auch nicht ganz unwirksam. Da nämlich die Gleichgewichtslage des belasteten Drahtendes wegen der remanenten Drillung des Drahtes sich mit der Belastung verändert, so müssen vertikale Stöße einen Ausschlag des Wagebalkens zur Folge haben. Dieser Ausschlag ist aber verschwindend klein bei Erschütterungen, wie sie gewöhnlich vom Straßengetriebe herrühren.

In der Reihe der möglichen Störungen müssen wir endlich auch jener Veränderungen gedenken, welche *durch Veränderungen in der Massenverteilung der Umgebung* in den Werten der zweiten Differentialquotienten des Schwerepotentials eintreten und besonders für  $\partial^2 U / \partial x \partial z$  und  $\partial^2 U / \partial y \partial z$ , wenn auch nur kleine, doch meßbare Werte erreichen können. Verschiebungen von Gegenständen im Gebäude sind dabei kaum in Betracht zu ziehen, wohl aber das Ansammeln von Wassermassen außerhalb, wie dies infolge von Regengüssen geschehen kann.

Der Gang unserer Beobachtungen und ihrer Berechnung, der auf all diese Umstände Rücksicht zu nehmen hatte, entwickelte und vervollständigte sich während der Ausführung unserer Arbeit. Die hier mitgeteilten Resultate sind nach drei verschiedenen Verfahren gewonnen, die wir als erste, zweite und dritte voneinander unterscheiden wollen.

Das erste Verfahren setzt voraus, daß die Größen  $\partial^2 U / \partial x \partial z$  und  $\partial^2 U / \partial y \partial z$  unveränderlich und auch die Empfindlichkeit des Instrumentes, also  $\tau$  stets dieselbe sei.

Das zweite Verfahren stützt sich wie das erste auf die Unveränderlichkeit von  $\partial^2 U / \partial x \partial z$  und  $\partial^2 U / \partial y \partial z$ , gibt aber die Möglichkeit zu, daß  $\tau$  während der Versuche mit verschiedenem Gehänge verschieden sei und sich auch zeitlich stetig verändere.

Das dritte vollkommenste Verfahren macht uns endlich von der Voraussetzung der Konstanz der Größen  $\partial^2 U / \partial x \partial z$  und  $\partial^2 U / \partial y \partial z$  wie auch der Größe  $\tau$  unabhängig.

Alle drei Verfahren stützen sich auf die Gleichungen (8) und (8'), welche wir vereinigen und dadurch umformen wollen, daß wir an Stelle von  $\vartheta$

$$\vartheta = \frac{n_0 - n}{2L}$$

setzen, wo  $n$  die der Gleichgewichtslage entsprechende Skalenablesung,  $n_0$  eine Konstante und  $L$  die in Skalenteilen abgemessene Skalenentfernung bedeutet. So ist dann:

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} n_0 - n &= \frac{L}{\tau} K \left( \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) \sin 2\alpha + \frac{2L}{\tau} K \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \cos 2\alpha \\ &\quad - \frac{2L}{\tau} M_a l_a h \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} \sin \alpha + \frac{2L}{\tau} M_a l_a h \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} \cos \alpha \\ &\quad + \frac{2L}{\tau} M_a l_a G \sin \varepsilon (\kappa_b - \kappa_a) \sin \alpha. \end{aligned} \right.$$

All unsere Beobachtungen geschahen in vier Stellungen der Drehwage, die wir, bezogen auf das Ende  $a$  des Balkens, als nördliche, östliche, südliche und westliche mit  $N$ ,  $O$ ,  $S$ ,  $W$  und auch die ihnen entsprechende Skalenablesungen mit  $n_N$ ,  $n_O$ ,  $n_S$  und  $n_W$  bezeichnen wollen. Das Einstellen auf  $N$  kann bei bekannter magnetischer Deklination am leichtesten mit Hilfe der Bussole geschehen; von dieser Stellung ausgehend, werden dann die anderen durch Drehen des Drehwagegehäuses um je  $90^\circ$  erreicht. Die Achse des Balkens weist aber in diesen Stellungen nicht genau nach den vier Himmelsrichtungen hin. Ist  $\Delta\alpha$  das Azimut der Balkenachse von Norden nach Osten gezählt, in der ursprünglichen  $N$ -Stellung, so erhalten wir folgende Werte für die den vier Stellungen entsprechenden Azimute:

$$\text{Stellung } N \dots \alpha_N = \Delta\alpha,$$

$$,, \quad O \dots \alpha_O = \Delta\alpha + \frac{n_N - n_O}{2L} + \frac{\pi}{2},$$

$$,, \quad S \dots \alpha_S = \Delta\alpha + \frac{n_N - n_S}{2L} + \pi,$$

$$,, \quad W \dots \alpha_W = \Delta\alpha + \frac{n_N - n_W}{2L} + \frac{3\pi}{2}.$$

Berücksichtigen wir, daß  $\Delta\alpha$  und auch die Größen

$$\frac{n_N - n_O}{2L}$$

klein sind, so berechnen wir für diese vier Stellungen aus Gleichung (13) die Annäherungswerte:

$$\begin{aligned}
 n_0 - n_N &= \frac{L}{\tau} K \left( \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) 2 \Delta \alpha + \frac{2L}{\tau} K \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \\
 &\quad - \frac{2L}{\tau} M_a l_a h \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} \Delta \alpha + \frac{2L}{\tau} M_a l_a h \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}, \\
 n_0 - n_O &= -\frac{L}{\tau} K \left( \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) 2 \left( \Delta \alpha + \frac{n_N - n_O}{2L} \right) - \frac{2L}{\tau} K \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \\
 &\quad - \frac{2L}{\tau} M_a l_a h \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} - \frac{2L}{\tau} M_a l_a h \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} \\
 &\quad \left( \Delta \alpha + \frac{n_N - n_O}{2L} \right) + \frac{2L}{\tau} M_a l_a G \sin \varepsilon (\alpha_b - \alpha_a), \\
 n_0 - n_S &= \frac{L}{\tau} K \left( \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) 2 \left( \Delta \alpha + \frac{n_N - n_S}{2L} \right) + \frac{2L}{\tau} K \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \\
 &\quad + \frac{2L}{\tau} M_a l_a h \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} \left( \Delta \alpha + \frac{n_N - n_S}{2L} \right) - \frac{2L}{\tau} M_a l_a h \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}, \\
 n_0 - n_W &= -\frac{L}{\tau} K \left( \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) 2 \left( \Delta \alpha + \frac{n_N - n_W}{2L} \right) - \frac{2L}{\tau} K \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \\
 &\quad + \frac{2L}{\tau} M_a l_a h \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} + \frac{2L}{\tau} K M_a l_a h \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} \left( \Delta \alpha + \frac{n_N - n_W}{2L} \right) \\
 &\quad - \frac{2L}{\tau} M_a l_a G \sin \varepsilon (\alpha_b - \alpha_a).
 \end{aligned}$$

In folgendem werden wir setzen

$$n_N - n_S = m \quad \text{und} \quad n_0 - n_W = v$$

und als Grundgleichungen folgende benutzen

$$(14) \left\{ \begin{aligned} m &= -\frac{4L}{\tau} M_a l_a h \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} + \frac{L}{\tau} K \left( \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) \frac{n_N - n_S}{L} \\ &\quad + \frac{2L}{\tau} M_a l_a h \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} \left( 2 \Delta \alpha + \frac{n_N - n_S}{2L} \right), \end{aligned} \right.$$

$$(15) \left\{ \begin{aligned} v &= +\frac{4L}{\tau} M_a l_a h \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} - \frac{L}{\tau} K \left( \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) \frac{n_O - n_W}{L} \\ &\quad + \frac{2L}{\tau} M_a l_a h \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} \left( 2 \Delta \alpha + \frac{n_N - n_O - n_W}{2L} \right) \\ &\quad + \frac{4L}{\tau} M_a l_a G \sin \varepsilon (\alpha_a - \alpha_b). \end{aligned} \right.$$

Für die benützten Schwerevariometer sind die in diesen Gleichungen vorkommenden Werte in folgender Tabelle zusammengestellt, worin  $M_a^*$  und  $h^*$  Durchschnittswerte bezeichnen, die bei den einzelnen Beobachtungen durch genauere ersetzt wurden.

	$\tau$	$\frac{K}{\tau}$	$L$	$l_a$	$M_a^*$	$h^*$	$G \sin \varepsilon$
Einfach. Schwerevariometer	0,5035	41 896	1232	20	25,4	21,2	1,6858
Doppelt. Schwerevariometer							
Gehänge 1 . . . .	0,5073	43 081	1258	20	25,4	21,2	1,6858
Gehänge 2 . . . .	0,5116	43 849	1258	20	25,8	21,2	1,6858

#### 4. Beobachtungen und deren Berechnung nach dem ersten Verfahren.

Benützt wurde ein einzelnes Drehwagegehänge, also das des einfachen oder nur eines des doppelten Schwerevariometers. Das Ende  $b$  blieb stets mit demselben in die Röhre hineingeschobenen Platinstücke belastet.

Das Ende  $a$  wurde nun in der schon angegebenen Weise mit einem der Untersuchung unterworfenen Körper (etwa mit Platin) belastet, und die Nordstellung des Instrumentes (das Ende  $a$  nach Norden) am geteilten Kreise mit Hilfe der Bussole näherungsweise festgestellt. Die zulässige Abweichung, also der Wert von  $\Delta a$ , darf hierbei die Größe von einigen Graden erreichen.

Nun wird das Instrument in regelmäßigen Zeitintervallen wiederholt zwischen zwei Stellungen umgelegt, die von der annähernd bestimmten Nordstellung um 90 bzw. 270° abstehen und als Oststellung und Weststellung bezeichnet werden.

Durch Ablesung der Gleichgewichtsstellungen erhalten wir dann

$$v = n_o - n_w$$

derart, daß der Abstand je einer dieser Stellungen bestimmt wird von dem Mittelwerte der unmittelbar vorangehenden und darauf folgenden entgegengesetzten Stellung. Bei dem einfachen Schwerevariometer sind hierbei die mit dem Temperaturkoeffizienten 0,4 reduzierten Werte von  $n$  benützt worden.

Ebenso wird dann für denselben Körper (etwa Platin) die Größe  $m$  bestimmt, wozu aber auch wenige Beobachtungen ausreichen, da bei diesem Verfahren die Kenntnis eines nur angenäherten Wertes dieser Größe erfordert wird.

Nachdem diese Beobachtungen mit einem Körper zu Ende geführt, wird an Stelle desselben am Ende  $a$  ein anderer (etwa Magnalium) von nahezu gleichem Gewicht gehängt und für denselben  $v'$  und  $m'$  bestimmt. Da dieses Vertauschen der



Körper nur bei arretiertem Instrumente erfolgen kann, ist eine kleine Verschiebung der ersten Nordstellung nicht zu vermeiden, so daß für  $\Delta\alpha$  zu setzen ist  $\Delta\alpha'$ . Die Größe  $\Delta\alpha' - \Delta\alpha$ , welche als Skalenverschiebung meßbar ist, erreicht aber kaum die Größe  $\frac{1}{1000}$ .

Nehmen wir nun an, daß während dieser ganzen bis auf einige Wochen dauernden Beobachtungsreihe die Größe  $\tau$  und auch die zweiten Differentialquotienten des Schwerepotentials konstant geblieben sind, so erhalten wir zur Berechnung von  $\kappa_a - \kappa'_a$ , d. i. dem Unterschiede der Attraktionskoeffizienten der beiden Körper (beispielsweise von Platin und Magnalium) der Gleichung (15) entsprechend

$$v - v' = \frac{4L}{\tau} M_a l_a \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} (h - h') + \frac{4L}{\tau} M_a l_a \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} (h \Delta\alpha - h' \Delta\alpha') + \frac{4L}{\tau} M_a l_a G \sin \varepsilon (\kappa_a - \kappa'_a),$$

wobei wir die mit Größen wie

$$\left\{ \left( \frac{n_0 - n_w}{L} \right) - \left( \frac{n_0 - n_w}{L} \right)' \right\}$$

multiplizierten Glieder als verschwindend kleine vernachlässigten.

Noch weiter läßt sich dieser Ausdruck dadurch vereinfachen, daß wir von den kleinen Größen zweiter Ordnung absehen; es wird dann

$$(16) \quad v - v' = v \frac{h - h'}{h} - m(\Delta\alpha - \Delta\alpha') + \frac{4L}{\tau} M_a l_a G \sin \varepsilon (\kappa_a - \kappa'_a),$$

also

$$(17) \quad \kappa_a - \kappa'_a = \frac{\tau}{4L M_a l_a G \sin \varepsilon} (v - v') + \frac{m(\Delta\alpha - \Delta\alpha') - v \frac{h - h'}{h}}{4L M_a l_a G \sin \varepsilon} \tau.$$

a) *Beobachtungen betreffend die Differenz:  $K_{\text{Magnalium}} - K_{\text{Platin}}$ , ausgeführt nach dem ersten Verfahren mit dem einfachen Schwerevariometer.*

#### *Erste Versuchsreihe.*

Am Ende  $a$  des Balkens wurde an 0,09 mm starkem Kupferbronzedraht ein Magnaliumzylinder von 11,92 cm Länge und 1,01 cm Durchmesser aufgehängt. Es war

$$M_a = 25,402 \text{ g}, \quad h = 21,20 \text{ cm}.$$



Aus den beobachteten 114  $v$ -Werten ergibt sich als Mittelwert

$$v = + 1,983 \pm 0,008,$$

und aus den beobachteten 64  $m$ -Werten als Mittelwert

$$m = + 8,138 \pm 0,009.$$

*Zweite Versuchsreihe.*

Am Ende  $a$  des Balkens wurde ein Platinzylinder von 6,01 cm Länge und 0,50 cm Durchmesser aufgehängt. Es war

$$M_a' = 25,430 \text{ g} \quad \text{und} \quad h' = 21,24 \text{ cm}.$$

Aus den beobachteten 48  $m'$ - und 56  $v'$ -Werten ergeben sich als Mittelwerte

$$m' = + 7,534 \pm 0,004 \quad \text{und} \quad v' = + 1,799 \pm 0,006.$$

Bei der Berechnung von  $(K_{\text{Magn.}} - K_{\text{Pt}})$  nach der Formel (17) setzen wir für  $M_a$  ihren Mittelwert in den zwei Versuchsreihen 25,416 g. Mit den für das Instrument schon angegebenen Werten ist dann

$$\frac{r}{4 L M_a l_a G \sin \varepsilon} = 0,1192 \cdot 10^{-6}.$$

Da die Ablesungen der Nordstellungen nahezu

$$n = 209,5 \quad \text{und} \quad n' = 206,5$$

waren, so ist

$$\Delta \alpha - \Delta \alpha' = \frac{n' - n}{2 L} = - \frac{3}{2464} = - 0,0012$$

und mit dem Mittelwerte von  $m = + 7,84$

$$m (\Delta \alpha - \Delta \alpha') = - 0,009.$$

Da ferner

$$\frac{h - h'}{h} = - 0,0002,$$

so ist das hiermit multiplizierte Glied zu vernachlässigen.

Wir erhalten also mit den gefundenen Werten von  $m$ ,  $m'$  und  $v$ ,  $v'$

$$K_{\text{Magn.}} - K_{\text{Pt}} = + 0,022 \cdot 10^{-6} - 0,001 \cdot 10^{-6} = + 0,021 \cdot 10^{-6}$$

und wenn wir noch den mittleren Fehler dieses Resultates berechnen:

$$K_{\text{Magn.}} - K_{\text{Pt}} = + 0,021 \cdot 10^{-6} \pm 0,001 \cdot 10^{-6}.$$

Dieses Resultat, das einen den mittleren Fehler übersteigenden Wert der gesuchten Differenz anzeigt, darf uns aber nicht irreführen. Wir erwähnten schon, daß bei dieser ersten Versuchsanordnung die Konstanz von  $\tau$  vorausgesetzt wurde; eine Zusammenstellung nicht allein der Werte  $v$ ,  $v'$ , sondern auch der Werte  $m$ ,  $m'$  zeigt uns aber deutlich genug, daß  $\tau$  bei den Versuchen mit Magnalium größer als bei denen mit Platin war, ist doch

$$v = +1,983, v' = +1,799; m = +8,198, m' = +7,584.$$

Bei Befolgung des zweiten Beobachtungsverfahrens, das zunächst beschrieben werden soll, werden wir von einer solchen Beeinflussung durch die Verschiedenheit und die Veränderlichkeit von  $\tau$  befreit und wir können die für dieses zweite Verfahren festgestellten Gleichungen auch zur Berechnung dieser ersten Versuche anwenden, insofern wir annehmen, daß  $\tau$  während der Versuche mit dem Magnalium konstant war, so auch  $\tau$  während der Versuche mit dem Platin, aber  $\tau$  und  $\tau'$  verschiedene Größe hatten. So berechnen wir das Resultat der vorangehenden Beobachtungen nach der weiter folgenden Gleichung (20) und erhalten

$$\kappa_{\text{Magn.}} - \kappa_{\text{Pt}} = +0,004 \cdot 10^{-6} \pm 0,001 \cdot 10^{-6}.$$

b) *Beobachtungen bezüglich der Differenz:*  $\kappa_{\text{Holz}} - \kappa_{\text{Platin}}$ , ausgeführt nach dem ersten Verfahren am Balken 1 des doppelten Schwerevariometers.

#### *Erste Versuchsreihe.*

An dem Ende  $a$  des Balkens wurde ein aus Schlangenholz längs der Fasern gedrehter Zylinder von 24,00 cm Länge und 1,01 cm Durchmesser aufgehängt. Es war

$$M_a = 24,925 \text{ g und } h = 21,03 \text{ cm.}$$

Aus den beobachteten 45  $m$ -Werten und 53  $v$ -Werten ergeben sich die Mittelwerte

$$m = +6,698 \pm 0,019 \text{ und } v = -1,797 \pm 0,008.$$

#### *Zweite Versuchsreihe.*

Am Ende  $a$  des Balkens wurde ein Platinzylinder von 6,00 cm Länge und 0,50 cm Durchmesser aufgehängt. Es war

$$M_a' = 25,896 \text{ g und } h' = 21,18 \text{ cm.}$$

Aus den beobachteten 14  $m'$ -Werten und 34  $v'$ -Werten erhalten wir als Mittelwerte

$$m' = +6,595 \pm 0,016 \text{ und } v' = -1,754 \pm 0,011.$$

Bei der Berechnung von  $\kappa_{\text{Holz}} - \kappa_{\text{Pt}}$  nach der Formel (17) setzen wir für  $M_a$  ihren Mittelwert = 25,160 g; mit den für den Balken 1 des Instrumentes schon angegebenen Werten ist dann:

$$\frac{\tau}{4 L M_a l_a G \sin \varepsilon} = 0,1189 \cdot 10^{-6}.$$

In der Nordstellung waren nahezu

$$n = 187,5 \quad \text{und} \quad n' = 191,3,$$

es ist also

$$\Delta \alpha - \Delta \alpha' = + \frac{3,8}{2516} = + 0,0015$$

und mit dem Mittelwerte  $m = + 6,65$

$$m (\Delta \alpha - \Delta \alpha') = + 0,010;$$

ferner war

$$\frac{h - h'}{h} = - 0,007 \quad \text{und} \quad v \frac{h - h'}{h} = + 0,013,$$

so erhalten wir

$$\kappa_{\text{Holz}} - \kappa_{\text{Pt}} = - 0,005 \cdot 10^{-6} - 0,000 \cdot 10^{-6} = - 0,005 \cdot 10^{-6}$$

und wenn noch der mittlere Fehler berechnet wird

$$\kappa_{\text{Holz}} - \kappa_{\text{Pt}} = - 0,005 \cdot 10^{-6} \pm 0,002 \cdot 10^{-6}.$$

So wie bei der Berechnung der Versuche mit Magnalium und Platin nach der Formel (20) berechnet, erhalten wir aber:

$$\kappa_{\text{Holz}} - \kappa_{\text{Pt}} = - 0,001 \cdot 10^{-6} \pm 0,002 \cdot 10^{-6}.$$

##### 5. Beobachtungen und deren Berechnung nach dem zweiten Verfahren.

Benützt wird, wie beim ersten Verfahren, nur ein Gehänge. Der eine Vergleichskörper wird an das Ende  $a$  gehängt. Das Instrument wird in gleichen Zeitintervallen immer um je einen rechten Winkel gedreht und so der Reihe nach in die Stellungen  $N, O, S, W$  gebracht; dieses Verfahren wird bis zur Genüge wiederholt.

Wir nehmen nun an, daß sich  $\tau$  und damit auch  $m$  und  $v$  wohl mit der Zeit verändern, daß aber diese Veränderung während dem zu wenigstens sechs Einstellungen erforderlichen Zeitraume als proportional der Zeit in Rechnung gezogen werden darf. Dann erhalten wir für Stellungen im Meridian die dem Momente ihrer Ablesung entsprechenden Werte von  $m$ , als die

Differenz dieser Ablesung vom Mittelwerte der Ablesungen in der vorangehenden und der folgenden entgegengesetzten Meridianstellung. In gleicher Weise ergeben sich die momentanen Werte in den Stellungen der ersten Vertikalen. Die Momentanwerte von  $v$  zur Zeit einer Meridianablesung berechnen wir aber als Mittel des vorangehenden und des folgenden Wertes dieser Größe. So auch umgekehrt.

Wir berechnen nun das Verhältnis  $v/m$ , wofür wir aus (14) und (15) mit Vernachlässigung kleiner Größen zweiter Ordnung erhalten:

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{v}{m} &= - \frac{\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}}{\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}} + \frac{2K}{1} \frac{\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}}{\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) - \left( \frac{v^2}{m^2} + 1 \right) \Delta \alpha \\ &\quad - \frac{v^2}{m^2} \frac{m}{4L} - \frac{2n_N - n_0 - n_W}{4L} + \frac{4L}{m} M_a l_a G \sin \varepsilon (\alpha_a - \alpha_b). \end{aligned} \right.$$

Daraufhin wird der Körper bei  $a$  durch einen anderen vertauscht und eine neue Reihe von Beobachtungen gibt uns den Wert von  $v'/m'$ .

Zur Berechnung des Wertes  $\alpha_a - \alpha_a'$  dient dann die Annäherungsformel

$$(19) \quad \frac{v}{m} - \frac{v'}{m'} = + \frac{4L M_a l_a G \sin \varepsilon}{m} (\alpha_a - \alpha_a') - \left( \frac{v^2}{m^2} + 1 \right) (\Delta \alpha - \Delta \alpha'),$$

woraus

$$(20) \quad \left\{ \begin{aligned} \alpha_a - \alpha_a' &= \frac{m}{4L M_a l_a G \sin \varepsilon} \left( \frac{v}{m} - \frac{v'}{m'} \right) \\ &\quad + \frac{m}{4L M_a l_a G \sin \varepsilon} \left( \frac{v^2}{m^2} + 1 \right) (\Delta \alpha - \Delta \alpha'), \end{aligned} \right.$$

in dieser Formel sind alle Größen vernachlässigt, welche zu dem strengen Werte von  $v/m$  weniger als  $1/1000$  beitragen.

a) *Beobachtungen bezüglich der Differenz:*  $\alpha_{Cu} - \alpha_{Pt}$ , ausgeführt nach dem zweiten Verfahren am Balken 1 des doppelten Schwerevariometers.

#### Erste Versuchsreihe.

Am Ende  $a$  des Balkens wurde ein Kupferzylinder von 6,40 cm Länge und 0,77 cm Durchmesser aufgehängt. Es war

$$M_a = 25,441 \text{ g}, \quad h = 21,16 \text{ cm}.$$

Aus den beobachteten 92 Werten ergeben sich die Mittelwerte

$$m = + 6,516 \pm 0,015 \quad \text{und} \quad v = - 1,923 \pm 0,005.$$

*Zweite Versuchsreihe.*

An dem Ende  $a$  des Balkens wurde ein Platinzylinder von 6,00 cm Länge und 0,50 cm Durchmesser aufgehängt. Es war

$$M_a' = 25,437 \text{ g}, \quad h = 21,23 \text{ cm}.$$

Aus den beobachteten 64 Werten erhalten wir die Mittelwerte

$$m' = + 6,536 \pm 0,013 \quad \text{und} \quad v' = - 1,982 \pm 0,011.$$

Bei der Berechnung von  $\kappa_{\text{Cu}} - \kappa_{\text{Pt}}$  nach der Formel (20) hätten wir in aller Strenge die Mittelwerte der für alle Beobachtungszeiten einzeln berechneten Werte von  $v/m$  und  $v'/m'$  zu setzen. Die zeitraubende Umständlichkeit einer derartigen Berechnung veranlaßte uns aber, statt dessen die Mittelwerte von  $v$  und  $m$ , sowie von  $v'$  und  $m'$  zu berechnen und die Verhältnisse  $v/m$  und  $v'/m'$  mit diesen zu bilden. Leicht ist es zu beweisen, daß diese Art der Berechnung bei der festgestellten Genauigkeitsgrenze hier zulässig ist. So berechnet, erhalten wir aus den Resultaten der zwei Versuchsreihen

$$\frac{v}{m} = - 0,295 \pm 0,001; \quad \frac{v'}{m'} = - 0,303 \pm 0,002,$$

ferner war in der Nordstellung im Durchschnitte

$$n = 214,5 \quad \text{und} \quad n' = 208,0,$$

demnach

$$\Delta a - \Delta a' = - 0,002,$$

also

$$\left( \frac{v^2}{m^2} + 1 \right) (\Delta a - \Delta a') = - 0,002.$$

Mit dem Mittelwerte  $M_a = 25,439$  erhalten wir

$$\frac{m \tau}{4 L M_a l_a G \sin s} = 0,7687 \cdot 10^{-6}$$

und somit

$$\kappa_{\text{Cu}} - \kappa_{\text{Pt}} = + 0,004 \cdot 10^{-6} \pm 0,002 \cdot 10^{-6}.$$

b) Beobachtungen bezüglich einer eventuellen Veränderung von  $\kappa$  bei der Reaktion von Silbersulfat und Ferrosulfat.

Das große Interesse, welches sich zur Reaktion:



seit den Untersuchungen H. Landolts<sup>1)</sup> knüpft, der bei diesen durch die Wage erkennbare Gewichtsveränderungen nachwies, veranlaßte uns zur Untersuchung, ob diese Reaktion eine Veränderung des Koeffizienten  $\kappa$  zur Folge hat.

Entsprechend den Angaben Landolts haben wir zu diesem Zwecke einmal abgewogen:

$$1,56 \text{ g Silbersulfat} + 4,25 \text{ g Wasser} = 5,81 \text{ g}$$

und

$$4,05 \text{ g krist. Ferrosulfat} + 1,62 \text{ g Wasser} + 0,14 \text{ g verd. Schwefelsäure} = 5,81 \text{ g}$$

und diese beiden Gemenge in zwei dünnwandige Glasröhren einzeln abgeschlossen. Ein zweites Mal haben wir diese zwei Gemenge zusammen in ein Glasrohr gebracht und aufgehoben, bis nach einer Woche das volle Eintreten der Reaktion zu erwarten war. In einer Versuchsreihe wurden nun die getrennten reagierenden Gemenge in eine zylindrische Messinghülse gebracht und darin an den Drehwagebalken gehängt. Bei einer zweiten (zeitlich vorangehenden) Versuchsreihe wurde mit dem die Reaktionsprodukte enthaltenden Rohr ähnlich verfahren.

#### *Erste Versuchsreihe.*

Die zwei die reagierenden Gemenge enthaltenden Glasrohre wurden in einer zylindrischen Messinghülse von 12,91 cm Länge und 1,16 cm Durchmesser übereinander stehend befestigt und an dem Balken des einfachen Schwerevariometers aufgehängt. Es war

$$M_a = 25,357 \text{ g}, \quad h = 21,50 \text{ cm},$$

worin 11,62 g auf die reagierenden Gemenge entfällt.

Aus den beobachteten 132 Werten ergeben sich die Mittelwerte

$$m = + 7,590 \pm 0,011 \quad \text{und} \quad v = - 2,027 \pm 0,005.$$

#### *Zweite Versuchsreihe.*

Die das Reaktionsprodukt enthaltende Glasröhre wurde in die früher benützte Messinghülse gebracht und in dieser aufgehängt. Es war

$$M_a' = 25,362 \text{ h}, \quad h' = 21,34 \text{ cm},$$

worin 11,62 g auf die Reaktionsprodukte entfällt.

Aus den beobachteten 132 Werten erhalten wir die Mittelwerte

$$m' = + 7,622 \pm 0,008; \quad v' = - 2,032 \pm 0,005.$$

1) Zeitschr. f. physik. Chem. 12. S. 1. 1893.

Bei der Berechnung  $\kappa - \kappa'$  nach der Formel (20) wird

$$\frac{v}{m} = -0,267 \pm 0,001; \quad \frac{v'}{m'} = -0,267 \pm 0,001,$$

ferner war

$$n = 211,1 \quad \text{und} \quad n' = 212,0,$$

also ist das mit  $(\Delta \alpha - \Delta \alpha')$  multiplizierte Glied zu vernachlässigen. Mit dem Mittelwerte  $M_a = 25,36$  erhalten wir

$$\frac{m \kappa}{4 L M_a l_a G \sin s} = 0,9089 \cdot 10^{-6}$$

und somit

$$\kappa - \kappa' = 0,000 \cdot 10^{-6} \pm 0,001 \cdot 10^{-6}.$$

$\kappa$  und  $\kappa'$  haben hier die Bedeutung von Mittelwerten für die nicht homogenen Massen  $M_a$  und  $M_a'$ , welche die reagierenden Gemenge bzw. die Reaktionsprodukte enthalten.

Wollen wir eine eventuell von Null verschiedene Änderung von  $\kappa$  der erfolgten Reaktion zuschreiben, so ist demnach auch

$$\kappa_o - \kappa_n = 0,000 \cdot 10^{-6} \pm 0,002 \cdot 10^{-6},$$

wo  $\kappa_o$  sich auf dieselbe Masse vor der Reaktion und  $\kappa_n$  aber nach der Reaktion bezieht.

#### 6. Beobachtungen und deren Berechnung nach dem dritten Verfahren.

Gebraucht wird hierzu ein doppeltes Schwerevariometer, deren Balken nur nahezu parallel sein müssen. Das Azimut des einen Balkens in der Nordlage sei bei einer ersten Versuchsreihe  $\Delta \alpha_{11}$ , bei einer zweiten  $\Delta \alpha_{111}$ , das des zweiten Balkens bei der ersten Versuchsreihe  $\Delta \alpha_{21}$  und bei der zweiten Versuchsreihe  $\Delta \alpha_{211}$ , hierbei sollten die Differenzen  $(\Delta \alpha_2 - \Delta \alpha_1)$  den Wert von etwa zwei Graden nicht übersteigen, was leicht zu erreichen ist.

Indem die *b*-Enden beider Balken mit den hineingeschobenen Platinstücken belastet sind, wird eines der Vergleichskörper  $\kappa_a$  am *a*-Ende des Gehänges 1, das andere  $\kappa_a'$  am *a*-Ende des Gehänges 2 aufgehängt.

Die Beobachtungen werden dann in den aufeinander folgenden Stellungen *N*, *O*, *S*, *W* usw. so angestellt, wie beim zweiten Verfahren.

Wir erhalten dann laut Gleichung (18)

$$\frac{v_1}{m_1} = -\frac{\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}}{\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}} + \frac{2K}{\tau} \frac{\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}}{\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) - \left( \frac{v_1^2}{m_1^2} + 1 \right) \Delta \alpha_{11} \\ - \frac{v_1^2}{m_1^2} \frac{m_1}{4L_1} - \left( \frac{2n_N - n_O - n_W}{4L} \right)_1 + \left( \frac{4LM_a l_a}{m\tau} \right)_1 G \sin \varepsilon (\alpha_a - \alpha_b)$$

und

$$\frac{v_2'}{m_2'} = -\frac{\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}}{\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}} + \frac{2K}{\tau} \frac{\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}}{\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) - \left( \frac{v_2'^2}{m_2'^2} + 1 \right) \Delta \alpha_{21} \\ - \frac{v_2'^2}{m_2'^2} \frac{m_2'}{4L_2} - \left( \frac{2n_N - n_O - n_W}{4L} \right)_2 + \left( \frac{4LM_a l_a}{m\tau} \right)_2 G \sin \varepsilon (\alpha_a' - \alpha_b),$$

denn durch Subtraktion und Vernachlässigung von Größen unter  $1/1000$

$$(21) \frac{v_1}{m_1} - \frac{v_2'}{m_2'} = \left( \frac{v^2}{m^2} + 1 \right) (\Delta \alpha_{21} - \Delta \alpha_{11}) + \frac{4LM_a l_a}{m\tau} G \sin \varepsilon (\alpha_a - \alpha_a'),$$

für  $v$ ,  $m$ ,  $\tau$ ,  $L$ ,  $M_a$ ,  $l_a$  sind ihre Mittelwerte zu nehmen.

Vertauschen wir nun die in den zwei Halbinstrumenten hängenden Vergleichskörper derart, daß jenes mit dem Koeffizienten  $\alpha_a'$  an den Balken 1, jenes mit dem Koeffizienten  $\alpha_a$  aber an den Balken 2 zu hängen komme, so ergibt eine zweite Beobachtungsreihe:

$$\frac{v_2}{m_2} - \frac{v_1'}{m_1'} = \left( \frac{v^2}{m^2} + 1 \right) (\Delta \alpha_{11} - \Delta \alpha_{21}) + \frac{4LM_a l_a}{m\tau} G \sin \varepsilon (\alpha_a - \alpha_a')$$

und wir erhalten durch Addition

$$(22) \left\{ \left( \frac{v_1}{m_1} - \frac{v_2'}{m_2'} \right) + \left( \frac{v_2}{m_2} - \frac{v_1'}{m_1'} \right) = \frac{8LM_a l_a G \sin \varepsilon}{m\tau} (\alpha_a - \alpha_a') \right. \\ \left. + \left( \frac{v^2}{m^2} + 1 \right) [(\Delta \alpha_{21} - \Delta \alpha_{21}) - (\Delta \alpha_{11} - \Delta \alpha_{11})] \right\}$$

und

$$(23) \left\{ \alpha_a - \alpha_a' = \frac{m\tau}{8LM_a l_a G \sin \varepsilon} \left\{ \left( \frac{v_1}{m_1} - \frac{v_2'}{m_2'} \right) + \left( \frac{v_2}{m_2} - \frac{v_1'}{m_1'} \right) \right\} \right. \\ \left. + \frac{m\tau}{LM_a l_a G \sin \varepsilon} \left( \frac{v^2}{m^2} + 1 \right) [(\Delta \alpha_{11} - \Delta \alpha_{11}) - (\Delta \alpha_{21} - \Delta \alpha_{21})] \right\}.$$



a) Beobachtungen betreffend die Differenz:  $\kappa_{\text{Wasser}} - \kappa_{\text{Cu}}$ .*Erste Versuchsreihe.*

An den Balken 1 des doppelten Schwerevariometers wurde ein mit Wasser gefülltes zylindrisches Messinggefäß von 14,14 cm Länge und 1,16 cm Durchmesser gehängt; es war

$$h = 21,34 \text{ cm}, \quad M_a = 25,447 \text{ g},$$

wovon auf das Wasser allein 12,82 g entfällt; so daß  $M_{\text{Wasser}} = 0,504 M_a$ .

An den Balken 2 des doppelten Schwerevariometers wurde ein Kupferzylinder von 6,50 cm Länge und 0,77 cm Durchmesser gehängt: es war

$$M_a = 25,805 \text{ g}, \quad h = 21,21 \text{ cm}.$$

Aus den beobachteten 108 Werten ergeben sich die Mittelwerte

$$m_1 = + 6,767 \pm 0,016, \quad v_1 = - 2,029 \pm 0,012,$$

$$m_2' = + 6,611 \pm 0,012, \quad v_2' = - 1,927 \pm 0,005,$$

und dementsprechend

$$\frac{v_1}{m_1} = - 0,300 \pm 0,002; \quad \frac{v_2'}{m_2'} = - 0,291 \pm 0,001.$$

*Zweite Versuchsreihe.*

Am Balken 1 des doppelten Schwerevariometers wurde ein Kupferzylinder von 6,40 cm Länge und von 0,77 cm Durchmesser gehängt. Es war

$$M_a = 25,441 \text{ g}, \quad h = 21,16 \text{ cm}.$$

Am Balken 2 wurde ein mit Wasser gefülltes zylindrisches Messinggefäß von 14,14 cm Länge und von 1,16 cm Durchmesser gehängt. Es war

$$h = 21,21 \text{ cm}, \quad M_a = 25,809 \text{ g},$$

wovon auf das Wasser allein 13,18 g entfällt, so daß  $M_{\text{Wasser}} = 0,511 M_a$ .

Aus den beobachteten 92 Werten ergeben sich die Mittelwerte

$$m_1' = + 6,516 \pm 0,015; \quad v_1' = - 1,923 \pm 0,005;$$

$$m_2 = + 6,786 \pm 0,010; \quad v_2 = - 2,016 \pm 0,009;$$

und dementsprechend

$$\frac{v_1'}{m_1'} = - 0,295 \pm 0,001; \quad \frac{v_2}{m_2} = - 0,297 \pm 0,001.$$

Bei der Berechnung von  $\kappa_a - \kappa_a'$  nach der Formel (28) erhalten wir aus den Resultaten der ersten und zweiten Versuchsreihe

$$\left\{ \left( \frac{v_1}{m_1} - \frac{v_1'}{m_1'} \right) + \left( \frac{v_2}{m_2} - \frac{v_2'}{m_2'} \right) \right\} = -0,011 \pm 0,003,$$

ferner war im Mittel

$$n_{1I} = 216,4, \quad n_{2I} = 594,7; \quad n_{1II} = 214,5, \quad n_{2II} = 595,8$$

und dementsprechend

$$\left( \frac{v^2}{m^2} + 1 \right) \{ (\Delta \alpha_{1I} - \Delta \alpha_{1II}) - (\Delta \alpha_{2I} - \Delta \alpha_{2II}) \} = -0,001.$$

Als Mittelwert erhalten wir

$$\frac{m \tau}{8 L M_a l_a G \sin \varepsilon} = 0,3940 \cdot 10^{-6}$$

und somit

$$\kappa - \kappa' = -0,005 \cdot 10^{-6} \pm 0,001 \cdot 10^{-6}.$$

Nehmen wir an, daß diese Differenz allein aus der Differenz ( $\kappa_{\text{Wasser}} - \kappa_{\text{Cu}}$ ) entsteht, so wird, da  $M_{\text{Wasser}} = 0,508 M_a$

$$\kappa_{\text{Wasser}} - \kappa_{\text{Cu}} = -0,010 \cdot 10^{-6} \pm 0,002 \cdot 10^{-6}.$$

*Beobachtungen betreffend die Differenz:  $\kappa_{\text{krist. Kupfersulfat}} - \kappa_{\text{Cu}}$ .*

*Erste Versuchsreihe.*

An den Balken 1 des doppelten Schwerevariometers wurde ein mit kristallisiertem Kupfersulfat gefülltes zylindrisches Messinggefäß von 12,99 cm Länge und 1,16 cm Durchmesser gehängt; es war

$$h = 21,22 \text{ cm} \quad \text{und} \quad M_a = 25,447 \text{ g},$$

wovon auf das Kupfersulfat allein 16,15 g entfällt, so daß  $M_{\text{Kupfersulfat}} = 0,635 M_a$ .

An den Balken 2 wurde ein zweiter Messingzylinder von 8,01 cm Länge und 1,16 cm Durchmesser gehängt, welcher Drahtstücke aus elektrolytischem Kupfer enthielt; es war

$$h = 21,28 \text{ cm} \quad \text{und} \quad M_a = 25,810 \text{ g},$$

wovon auf das elektrolytische Kupfer allein 18,83 g entfällt, so daß  $M_{\text{Cu}} = 0,730 M_a$ .

Aus den beobachteten 111 Werten ergeben sich die Mittelwerte

$$m_1 = +6,676 \pm 0,011 \quad \text{und} \quad v_1 = -1,965 \pm 0,008$$

$$m_2' = +6,684 \pm 0,010 \quad \text{und} \quad v_2' = -1,937 \pm 0,006$$

und dementsprechend

$$\frac{v_1}{m_1} = -0,294 \pm 0,001; \quad \frac{v_1'}{m_1'} = -0,290 \pm 0,001.$$

### Zweite Versuchsreihe.

An den Balken 1 wurde ein Messingzylinder von 8,01 cm Länge und 1,16 cm Durchmesser gehängt, welcher Drahtstücke aus elektrolytischem Kupfer enthielt, es war

$$h = 21,11 \text{ cm} \quad \text{und} \quad M_a = 25,468 \text{ g},$$

wovon auf das elektrolytische Kupfer 18,49 g entfallen, so daß  $M_{\text{Cu}} = 0,726 M_a$ .

An den Balken 2 wurde ein mit kristallisiertem Kupfersulfat gefülltes zylindrisches Messinggefäß von 12,99 cm Länge und 1,16 cm Durchmesser gehängt, es war

$$h = 21,18 \text{ cm} \quad \text{und} \quad M_a = 25,842 \text{ g},$$

wovon auf das Kupfersulfat allein 16,54 g entfallen, so daß  $M_{\text{krist. Kupfersulfat}} = 0,640 M_a$ .

Aus den beobachteten 132 Werten ergeben sich die Mittelwerte

$$m_1' = +6,635 \pm 0,010 \quad \text{und} \quad v_1' = -1,984 \pm 0,005,$$

$$m_2 = +6,613 \pm 0,008 \quad \text{und} \quad v_2 = -1,923 \pm 0,007,$$

und dementsprechend

$$\frac{v_1'}{m_1'} = -0,298 \pm 0,001; \quad \frac{v_2}{m_2} = -0,291 \pm 0,001.$$

Bei der Berechnung  $(\kappa - \kappa')$  nach der Formel (23) erhalten wir

$$\left\{ \left( \frac{v_1}{m_1} - \frac{v_2'}{m_2'} \right) + \left( \frac{v_2}{m_2} - \frac{v_1'}{m_1'} \right) \right\} = +0,003 \pm 0,002,$$

ferner waren im Mittel

$$n_{11} = 216,0, \quad n_{21} = 593,6 \quad \text{und} \quad n_{111} = 192,8, \quad n_{211} = 592,3,$$

und dementsprechend

$$\left( \frac{v^2}{m^2} + 1 \right) \{ (\Delta \alpha_{11} - \Delta \alpha_{111}) - (\Delta \alpha_{21} - \Delta \alpha_{211}) \} = -0,010.$$

Als Mittelwerte erhalten wir

$$\frac{m \tau}{8 L M_a l_a G \sin \epsilon} = 0,3898 \cdot 10^{-6}$$

und somit

$$\kappa - \kappa' = -0,003 \cdot 10^{-6} \pm 0,001 \cdot 10^{-6}.$$

Nehmen wir an, daß diese Differenz allein aus der Differenz ( $\kappa_{\text{krist. Kupfersulfat}} - \kappa_{\text{Cu}}$ ) entsteht, so wird, da  $M_{\text{krist. Kupfersulfat}} = 0,638 M_a$

$$\kappa_{\text{krist. Kupfersulfat}} - \kappa_{\text{Cu}} = -0,005 \cdot 10^{-6} \pm 0,002 \cdot 10^{-6}.$$

Beobachtungen, betreffend die Differenz:  $\kappa_{\text{Kupfersulfatlösung}} - \kappa_{\text{Cu}}$ .

*Erste Versuchsreihe.*

An den Balken 1 des doppelten Schwerevariometers wurde ein mit Kupfersulfatlösung gefülltes, inwendig versilbertes zylindrisches Messinggefäß von 13,50 cm Länge und von 1,16 cm Durchmesser gehängt.

Die Lösung enthielt entsprechend dem von Heydweiller bei seinen Untersuchungen<sup>1)</sup> benützten Lösungsverhältnis 20,61 g kristallisiertes Kupfersulfat auf 49,07 g Wasser. Es war

$$h = 21,22 \text{ cm}, \quad M_a = 25,459 \text{ g},$$

wovon auf die Kupfersulfatlösung allein 15,38 g entfallen, so daß  $M_{\text{Kupfersulfatlösung}} = 0,604 M_a$ .

An den Balken 2 wurde ein zweiter Messingzylinder von 8,01 cm Länge und von 1,16 cm Durchmesser gehängt, welcher Drahtstücke aus elektrolytischem Kupfer enthielt. Es war

$$h = 21,13 \text{ cm}, \quad M_a = 25,884 \text{ g},$$

wovon auf das elektrolytische Kupfer allein 18,85 g entfällt, so daß  $M_{\text{Cu}} = 0,730 M_a$ .

Aus den beobachteten 132 Werten erhalten wir die Mittelwerte

$$m_1 = +6,693 \pm 0,011 \quad \text{und} \quad v_1 = -2,027 \pm 0,006,$$

$$m_2' = +6,669 \pm 0,010 \quad \text{und} \quad v_2' = -1,928 \pm 0,005,$$

und dementsprechend

$$\frac{v_1}{m_1} = -0,303 \pm 0,001 \quad \text{und} \quad \frac{v_2'}{m_2'} = -0,289 \pm 0,001.$$

*Zweite Versuchsreihe.*

An den Balken 1 wurde ein Messingzylinder von 8,01 cm Länge und von 1,16 cm Durchmesser gehängt, welcher Drahtstücke aus elektrolytischem Kupfer enthielt; es war

$$h = 21,11 \text{ cm}, \quad M_a = 25,468 \text{ g},$$

1) Über Gewichtsänderungen bei chem. und phys. Umsetzungen. Ann. d. Phys. 5. S. 394. 1901.

wovon auf das elektrolytische Kupfer allein 18,49 g entfällt, so daß  $M_{\text{Cu}} = 0,726 M_a$ .

An den Balken 2 wurde ein mit Kupfersulfatlösung gefülltes, zylindrisches, inwendig versilbertes Messinggefäß von 13,50 g Länge und von 1,16 cm Durchmesser gehängt; es war

$$h = 21,22 \text{ cm}, \quad M_a = 25,833 \text{ g},$$

wovon auf die Kupfersulfatlösung allein 15,40 g entfällt, so daß

$$M_{\text{Kupfersulfatlösung}} = 0,596 M_a.$$

Aus den beobachteten 132 Werten erhalten wir die Mittelwerte

$$m_1' = + 6,641 \pm 0,011 \quad \text{und} \quad v_1' = - 1,972 \pm 0,005,$$

$$m_2 = + 6,766 \pm 0,010 \quad \text{und} \quad v_2 = - 1,982 \pm 0,007,$$

und dementsprechend

$$\frac{v_1'}{m_1'} = - 0,297 \pm 0,001 \quad \text{und} \quad \frac{v_2}{m_2} = - 0,293 \pm 0,001.$$

Bei der Berechnung  $(\kappa - \kappa')$  nach der Formel (23) erhalten wir

$$\left\{ \left( \frac{v_1}{m_1} - \frac{v_2'}{m_2'} \right) + \left( \frac{v_2}{m_2} - \frac{v_1'}{m_1'} \right) \right\} = - 0,010 \pm 0,002,$$

ferner war im Mittel

$$n_{11} = 192,4, \quad n_{21} = 593,6; \quad n_{111} = 192,8, \quad n_{211} = 593,4$$

und dementsprechend ist das mit

$$\{(\Delta \alpha_{11} - \Delta \alpha_{111}) - (\Delta \alpha_{21} - \Delta \alpha_{211})\}$$

multiplizierte Glied zu vernachlässigen.

Als Mittelwert

$$\frac{m \tau}{8 L M_a l_a G \sin \varepsilon} = 0,3917 \cdot 10^{-6}$$

und somit

$$\kappa - \kappa' = - 0,004 \cdot 10^{-6} \pm 0,001 \cdot 10^{-6}.$$

Nehmen wir an, daß diese Differenz allein aus der Differenz  $(\kappa_{\text{Kupfersulfatlösung}} - \kappa_{\text{Cu}})$  entsteht, so wird, da  $M_{\text{Kupfersulfatlösung}} = 0,600 M_a$

$$\kappa_{\text{Kupfersulfatlösung}} - \kappa_{\text{Cu}} = - 0,007 \cdot 10^{-6} \pm 0,002 \cdot 10^{-6}.$$

Beobachtungen, betreffend die Differenz:  $\kappa_{\text{Asbest}} - \kappa_{\text{Cu}}$ .

#### Erste Versuchsreihe.

An den Balken 1 des doppelten Schwerevariometers wurde ein mit Asbest gefülltes zylindrisches Messinggefäß von 12,99 cm Länge und von 1,16 cm Durchmesser gehängt. Es war

$$h = 21,31 \text{ cm}, \quad M_a = 25,462 \text{ g},$$

wovon auf den Asbest allein 15,25 g entfällt, so daß  $M_{\text{Asbest}} = 0,599 M_a$ .

An den Balken 2 wurde ein zweiter Messingzylinder von 8,01 cm Länge und von 1,16 cm Durchmesser gehängt, welcher Drahtstücke aus elektrolytischem Kupfer enthielt. Es war

$$h = 21,13 \text{ cm}, \quad M_a = 25,834 \text{ g},$$

wovon auf das elektrolytische Kupfer allein 18,85 g entfällt, so daß  $M_{\text{Cu}} = 0,730 M_a$ .

Aus den beobachteten 110 Werten ergeben sich die Mittelwerte

$$m_1 = + 6,685 \pm 0,012, \quad v_1 = - 2,024 \pm 0,006,$$

$$m_2' = + 6,705 \pm 0,009, \quad v_2' = - 1,935 \pm 0,004,$$

und dementsprechend

$$\frac{v_1}{m_1} = - 0,303 \pm 0,001 \quad \text{und} \quad \frac{v_2'}{m_2'} = - 0,289 \pm 0,001.$$

#### Zweite Versuchsreihe.

An den Balken 1 wurde ein Messingzylinder von 8,01 cm Länge und von 1,16 cm Durchmesser gehängt, welcher Drahtstücke aus elektrolytischem Kupfer enthielt. Es war

$$h = 21,10 \text{ cm}, \quad M_a = 25,469 \text{ g},$$

wovon auf das elektrolytische Kupfer allein 18,48 g entfällt, so daß  $M_{\text{Cu}} = 0,726 M_a$ .

An den Balken 2 wurde ein mit Asbest gefülltes zylindrisches Messinggefäß von 12,99 cm Länge und 1,16 cm Durchmesser gehängt. Es war

$$h = 21,24 \text{ cm}, \quad M_a = 25,833 \text{ g},$$

wovon auf den Asbest allein 15,25 g entfällt, so daß  $M_{\text{Asbest}} = 0,596 M_a$ .

Aus den beobachteten 106 Werten ergeben sich die Mittelwerte

$$m_1' = + 6,591 \pm 0,012, \quad v_1' = - 1,946 \pm 0,005,$$

$$m_2 = + 6,736 \pm 0,013, \quad v_2 = - 1,933 \pm 0,008,$$

und dementsprechend

$$\frac{v_1'}{m_1'} = - 0,295 \pm 0,001 \quad \text{und} \quad \frac{v_2}{m_2} = - 0,287 \pm 0,001.$$

Bei der Berechnung  $(\kappa - \kappa')$  nach der Formel (23) erhalten wir

$$\left\{ \left( \frac{v_1}{m_1} - \frac{v_2'}{m_2'} \right) + \left( \frac{v_2}{m_2} - \frac{v_1'}{m_1'} \right) \right\} = - 0,006 \pm 0,002,$$

ferner war im Mittel

$$n_{11} = 193,8, n_{21} = 592,8; n_{111} = 193,8, n_{211} = 593,7,$$

demnach ist das mit  $\{(\Delta a_{11} - \Delta a_{111}) - (\Delta a_{21} - \Delta a_{211})\}$  multiplizierte Glied zu vernachlässigen.

Als Mittelwert erhalten wir

$$\frac{m \tau}{8 L M_a l_a G \sin s} = 0,3909 \cdot 10^{-6}$$

und somit

$$\kappa - \kappa' = -0,002 \cdot 10^{-6} \pm 0,001 \cdot 10^{-6}.$$

Nehmen wir an, daß diese Differenz allein aus der Differenz ( $\kappa_{\text{Asbest}} - \kappa_{\text{Cu}}$ ) entsteht, so wird, da  $M_{\text{Asbest}} = 0,598 M_a$

$$\kappa_{\text{Asbest}} - \kappa_{\text{Cu}} = -0,003 \cdot 10^{-6} \pm 0,002 \cdot 10^{-6}.$$

*Beobachtungen, betreffend die Differenz:  $\kappa_{\text{Talg}} - \kappa_{\text{Cu}}$ .*

*Erste Versuchsreihe.*

An den Balken 1 des doppelten Schwerevariometers wurde ein mit reinem Talg gefülltes zylindrisches Messinggefäß von 15,60 cm Länge und von 1,16 cm Durchmesser gehängt. Das spezifische Gewicht des benützten Talges war 0,918 (23,9° C) und dementsprechend das mittlere Molekularvolum etwa das 53fache des Wassers. Ferner war

$$h = 21,21 \text{ cm}, M_a = 25,470 \text{ g},$$

wovon auf den Talg allein 13,78 g entfällt, so daß  $M_{\text{Talg}} = 0,541 M_a$ .

An den Balken 2 wurde ein zweiter Messinzyylinder von 8,01 cm Länge und von 1,16 cm Durchmesser gehängt, welche Drahtstücke aus elektrolytischem Kupfer enthielt. Es war

$$h = 21,13 \text{ cm}, M_a = 25,834 \text{ g},$$

wovon auf das elektrolytische Kupfer allein 18,85 g entfällt, so daß  $M_{\text{Cu}} = 0,730 M_a$ .

Aus den beobachteten 118 Werten ergeben sich die Mittelwerte

$$m_1 = +6,575 \pm 0,013, v_1 = -1,917 \pm 0,012,$$

$$m_2' = +6,637 \pm 0,013, v_2' = -1,877 \pm 0,007,$$

und dementsprechend

$$\frac{v_1}{m_1} = -0,292 \pm 0,002; \quad \frac{v_2'}{m_2'} = -0,283 \pm 0,001.$$

## Zweite Versuchsreihe.

An den Balken 1 wurde ein Messingzylinder von 8,01 cm Länge und von 1,16 cm Durchmesser gehängt, welcher Drahtstücke aus elektrolytischem Kupfer enthielt. Es war

$$h = 21,10 \text{ cm}, \quad M_a = 25,469 \text{ g},$$

wovon auf das elektrolytische Kupfer allein 18,48 g entfällt, so daß  $M_{\text{Cu}} = 0,726 M_a$ .

An den Balken 2 wurde ein mit Talg gefülltes zylindrisches Messinggefäß von 15,60 cm Länge und 1,16 cm Durchmesser gehängt. Es war

$$h = 21,16 \text{ cm}, \quad M_a = 25,847 \text{ g},$$

wovon auf den Talg allein 13,78 g entfällt, so daß  $M_{\text{Talg}} = 0,533 M_a$ .

Aus den beobachteten 115 Werten ergeben sich die Mittelwerte

$$m_1' = + 6,655 \pm 0,009, \quad v_1' = - 1,881 \pm 0,007,$$

$$m_2 = + 6,831 \pm 0,005, \quad v_2 = - 1,990 \pm 0,006,$$

und dementsprechend

$$\frac{v_1'}{m_1'} = - 0,283 \pm 0,001 \quad \text{und} \quad \frac{v_2}{m_2} = - 0,282 \pm 0,001.$$

Bei der Berechnung  $(\kappa - \kappa')$  nach der Formel (23) erhalten wir

$$\left\{ \left( \frac{v_1}{m_1} - \frac{v_2'}{m_2'} \right) + \left( \frac{v_2}{m_2} - \frac{v_1'}{m_1'} \right) \right\} = - 0,008 \pm 0,003.$$

Ferner war im Mittel

$$n_{11} = 195,2, \quad n_{21} = 593,7; \quad n_{12} = 196,2, \quad n_{22} = 593,9,$$

demnach ist das mit  $\{(\Delta a_{11} - \Delta a_{12}) - (\Delta a_{21} - \Delta a_{22})\}$  multiplizierte Glied zu vernachlässigen.

Als Mittelwert erhalten wir

$$\frac{m \tau}{8 L M_a l_a G \sin s} = 0,3907 \cdot 10^{-6}$$

und somit

$$\kappa - \kappa' = - 0,003 \cdot 10^{-6} \pm 0,001 \cdot 10^{-6}.$$

Nehmen wir an, daß diese Differenz allein aus der Differenz  $(\kappa_{\text{Talg}} - \kappa_{\text{Cu}})$  entsteht, so wird, da  $M_{\text{Talg}} = 0,537 M_a$

$$\kappa_{\text{Talg}} - \kappa_{\text{Cu}} = - 0,006 \cdot 10^{-6} \pm 0,002 \cdot 10^{-6}.$$



### 7. Beobachtungen im Meridian zur Bestimmung der Differenz ( $\kappa - \kappa'$ ) bezüglich der Sonnenanziehung.

Als Grundlage dient Gleichung (12) und die ihr vorangehenden Betrachtungen. Benützen werden wir das einfache Schwerevariometer, für welches

$$\Sigma m_a l_a \kappa_a - \Sigma m_b l_b \kappa_b = M_a l_a (\kappa_a - \kappa_b),$$

gesetzt

$$\vartheta = \vartheta_0 - \frac{1}{\tau} \left( f_0 \frac{M}{D^2} \right) M_a l_a (\kappa_a - \kappa_b) \sin \zeta \sin A,$$

für die Sonnenanziehung

$$f_0 \frac{M}{D^2} = 0,586$$

und für das einfache Schwerevariometer

$$M_a = 25,4 \text{ g}, \quad l_a = 20 \text{ cm}, \quad \tau = 0,5035, \quad \vartheta - \vartheta_0 = \frac{n - n_0}{2464},$$

also

$$n - n_0 = 1457000 (\kappa_a - \kappa_b) \sin \zeta \sin A$$

und

$$n' - n = 1457000 (\kappa_a - \kappa_b) (\sin \zeta' \sin A' - \sin \zeta \sin A),$$

daher

$$(a) \quad \kappa_a - \kappa_b = 0,6863 \cdot 10^{-6} \frac{n' - n}{\sin \zeta' \sin A' - \sin \zeta \sin A}.$$

Diese Formel benützend, scheint es möglich zu sein, die Differenz ( $\kappa_a - \kappa_b$ ) durch eine einzige Versuchsreihe zu bestimmen, bei welcher zwei heterogene Körper einzeln an den zwei Enden des im Meridian stehenden Drehwagebalkens hängen. Es ist aber vorauszusehen, daß eine aus der verschiedenen Gravitation dieser verschiedenen Körper etwa entstehende tägliche Schwankung des so belasteten Balkens noch von anderen solchen Schwankungen gleicher Periode begleitet sein wird, die von den nicht vollkommen ausgeschlossenen störenden Einwirkungen herrühren.

Um den Einfluß dieser letzteren auf das Resultat möglichst auszuschließen, haben wir den folgenden Gang der Beobachtungen gewählt.

In einer *ersten Versuchsreihe* wurde an das Ende *a* des Balkens ein Platinzylinder gehängt und die Stellung des Balkens, sowie die Temperatur während zwei Wochen stündlich abgelesen. Die so gewonnenen Ablesungswerte wurden

dann nach Tagesstunden zusammengestellt und nach deren Reduktion auf gleiche Temperatur die mittleren Stundenwerte von  $n$  berechnet.

Hierauf wurde in einer zweiten Versuchsreihe an das Ende  $a$  ein Magnaliumzylinder gehängt und derselbe Gang der Beobachtung und der Berechnung verfolgt wie bei der ersten Versuchsreihe.

Bezeichnen wir nun die Differenz  $(n' - n)$  für zwei Tageszeiten bei der ersten Versuchsreihe mit

$$(n' - n)_I$$

und bei der zweiten Versuchsreihe für dieselben Tageszeiten mit

$$(n' - n)_{II},$$

so berechnen wir auf Grundlage der Formel (a)

$$(b) \quad \alpha_{\text{Magnalium}} - \alpha_{\text{Pt}} = 0,6863 \cdot 10^3 \frac{(n' - n)_{II} - (n' - n)_I}{\sin \zeta' \sin A' - \sin \zeta \sin A}.$$

Wohl verändert sich  $(\sin \zeta' \sin A' - \sin \zeta \sin A)$  während dem Zeitraume, der zwischen der ersten und zweiten Versuchsreihe liegt, doch ist es gewiß genügend, wenn wir hier den mittleren Wert dieser Größe in die Rechnung einführen.

#### *Erste Versuchsreihe.*

An das Ende  $a$  des einfachen Schwerevariometers wurde ein Platinzylinder von 6,01 cm Länge und 0,5 cm Durchmesser gehängt und der Balken so in den Meridian gestellt, daß sein Ende  $a$  nach Norden gerichtet sei. Es war

$$h = 21,24 \text{ cm}, \quad M_a = 25,421 \text{ g}.$$

Die Beobachtungen geschahen im Zeitraume vom 18. Juni bis 2. Juli 1908 und wurden dann nach Tagesstunden geordnet und die mittleren Stundenwerte, sowie deren Abweichung vom Gesamtmittel gebildet.

#### *Zweite Versuchsreihe.*

An das Ende  $a$  des einfachen Schwerevariometers wurde ein Magnaliumzylinder von 11,91 cm Länge und 1,01 cm Durchmesser gehängt und der Balken so in den Meridian gestellt, daß sein Ende  $a$  nach Norden gerichtet sei. Es war

$$h = 21,24 \text{ cm} \quad \text{und} \quad M_a = 25,362 \text{ g}.$$

Die Beobachtungen geschahen im Zeitraume vom 21. Juli bis 4. August 1908 und wurden gleich so behandelt, wie bei der ersten Versuchsreihe.

Die Berechnung ( $\kappa_{\text{Magnallium}} - \kappa_{\text{Pt}}$ ) geschah mit jenen für diesen Zweck entsprechendsten Werten von  $n$  und  $n'$ , für welche  $\zeta = 90^\circ$  war, die also zur Zeit des Sonnenaufganges und Sonnenunterganges abgelesen wurden.

Annähernd setzen wir für den Wert  $n$  bei Sonnenaufgang das Mittel aus den zwei mittleren Stundenwerten zur Zeit  $4^{\text{h}} 0^{\text{m}}$  und zur Zeit  $5^{\text{h}} 0^{\text{m}}$ , für den Wert  $n'$  bei Sonnenuntergang das Mittel aus den zwei Stundenwerten zur Zeit  $7^{\text{h}} 0^{\text{m}}$  und  $8^{\text{h}} 0^{\text{m}}$ , also für  $A = -120^\circ$  und für  $A' = +120^\circ$ .

Wir haben dann aus den Beobachtungen der ersten Versuchsreihe:

$$n' - n = -0,062,$$

aus den Beobachtungen der zweiten Versuchsreihe:

$$n' - n = -0,046.$$

Wollten wir unsere Berechnung auf eine einzige Versuchsreihe begründen, also die Formel (a) benützen, so ergebe sich

$$\kappa_{\text{Magnallium}} - \kappa_{\text{Pt}} = -0,018 \cdot 10^{-6}.$$

Mit Ausschluß jener störenden Einflüsse, welche Schwankungen von täglicher Periode bewirken, also mit Benutzung der Resultate beider Versuchsreihen und der Formel (b) erhalten wir aber richtiger

$$\kappa_{\text{Magnallium}} - \kappa_{\text{Pt}} = +0,006 \cdot 10^{-6}.$$

#### 8. Über Beobachtungen zur Entscheidung der Frage, ob eine Absorption der Anziehung durch dazwischenliegende Körper stattfindet.

Mit unseren vorangehenden Betrachtungen in engstem Zusammenhange steht die Frage, ob die von einem Körper  $A$  auf einen anderen  $B$  ausgeübte Anziehung von einem dritten dazwischen liegenden Körper  $C$  abhängig sei, insbesondere, ob den Körpern ein Absorptionsvermögen gegen Anziehung zuzuschreiben sei. Denn wäre dieses letztere der Fall, so müßten Körper verschiedener Form und Größe verschieden von einem anderen angezogen werden. Ja, es müßte diese Anziehung sogar davon abhängen, wie die verschiedenen Teile des angezogenen Körpers gegen den anziehenden gerichtet sind. Die vorgelagerten Teile des angezogenen Körpers würden ja dann die Anziehung seiner dahinter gelegenen Teile beeinflussen. In dieser Auffassung können schon die vorher beschriebenen die Anziehung verschiedener Körper betreffenden

Beobachtungen als solche betrachtet werden, die zur Entscheidung der hier aufgeworfenen Frage dienen. Doch ist bezüglich derselben auch die Möglichkeit des direkten Versuches nicht ausgeschlossen.

Schon im Jahre 1902 haben wir derartige Versuche ausgeführt, und zwar mit dem Gravitationskompensator.<sup>1)</sup>

Die an beiden Enden eines 50 cm langen Drehwagebalkens befestigten Messingkugeln von je 30 g Gewicht sind da außer einem metallenen Schutzrohre noch von den zur Kompensation dienenden Vorrichtungen umgeben (vgl. Figg. 8 u. 9.).

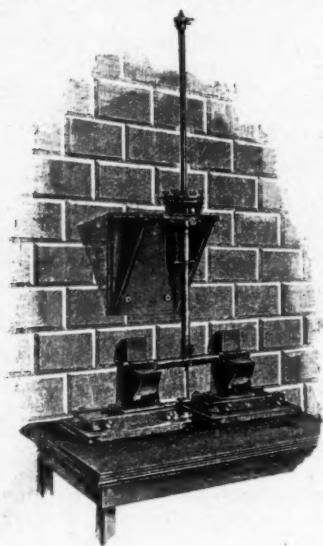


Fig. 8.

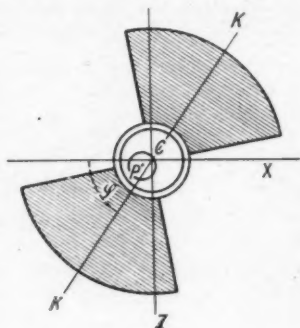


Fig. 9.

Jede dieser an den zwei Enden angebrachten Vorrichtungen besteht aus einer das Schutzrohr umgebenden zylindrischen Metallhülse von 5 cm Durchmesser. Diese Metallhülsen tragen je zwei sich gegenüber liegende Zylinderquadranten (Kompensationsmassen) aus Bleiguß und ruhen auf horizontalen Achsenlagern, so daß der Neigungswinkel  $\varphi$  ihrer Mittellinie  $KK$  zur Horizontalen durch Drehung verändert werden kann. Die Dimensionen dieser Quadranten sind: innerer Radius 2,5 cm, äußerer Radius 12 cm, Dicke, d. h. Abstand der beiden ebenen Begrenzungsflächen 9,5 cm. Die Enden des Balkens, richtiger

1) R. v. Eötvös, Untersuchungen über Gravitation und Erdmagnetismus. Wied. Ann. 59. S. 352. 1896.

die daran haftenden Messingkugeln schweben in der Mitte je eines kompensierenden Quadrantenpaares.

Der Mittelpunkt  $P$  der Kugeln am Balkenende sollte bei vollkommen eingestelltem Instrumente in die Drehungsachse  $C$  der Kompensatoren zu liegen kommen. Da aber diese Vollkommenheit nicht erreicht werden kann, haben wir in unserer Figur  $P$  und  $C$  als voneinander abstehend dargestellt, und so werden wir auch die Koordinaten von  $P$ , bezogen auf ein durch  $C$  gelegtes System,  $XZ$  durch  $\xi$  und  $\zeta$  bezeichnen.

In dem gegenwärtigen Falle wurde dieses Instrument stets so benützt, daß die beiden Kompensatoren zu dem von ihnen umschlossenen Balkenende die gleiche Lage hatten. Stellt die Figur den Querschnitt des Kompensators und der darin schwebenden Kugel dar, wie er einem Beobachter erscheint, der, vor dem einen Ende stehend, nach der Drehungsachse schaut, so stellt sie auch das gleiche dar bezüglich auf das andere Ende des Balkens und den anderen Teil des Kompensators für einen Beobachter, der dieses andere Ende ebenfalls der Drehungsachse zugekehrt betrachtet.

In diesem Falle kann das durch die Anziehung der Kompensatoren auf den Balken ausgeübte Drehungsmoment in folgender Form ausgedrückt werden:

$$F = A\xi + B\cos\varphi + \xi C\cos 2\varphi + \zeta D\sin 2\varphi.$$

Bei den in Frage stehenden Untersuchungen wurden nun die Kompensatoren in vier um je einen rechten Winkel abstehende Stellungen gebracht und zwar

Stellung I

$$\varphi_1 = 45^\circ$$

$$F_1 = A\xi_1 + B\cos\frac{\pi}{4} + \zeta D; \quad F_2 = A\xi_2 - B\cos\frac{\pi}{4} - \zeta D;$$

Stellung II

$$\varphi_2 = 135^\circ$$

Stellung III

$$\varphi_3 = 225^\circ$$

$$F_3 = A\xi_3 - B\cos\frac{\pi}{4} + \zeta D; \quad F_4 = A\xi_4 + B\cos\frac{\pi}{4} - \zeta D.$$

Stellung IV

$$\varphi_4 = 315^\circ$$

Nehmen wir an, daß die Anziehung der Erdmassen auf die Massen unserer Drehwage durch die dazwischen liegenden Kompensatormassen einer Absorption ähnlich beeinflußt werden, so addiert sich zu diesem Drehungsmoment  $F$  noch ein anderes  $\Phi$ , welches je nach der eingenommenen Stellung der

Kompensatoren nach vorwärts oder nach rückwärts gerichtet ist.

Denken wir uns nämlich die Erde durch eine die Balkenachse enthaltende Vertikalebene in zwei Hälften geteilt, so wirkt die Anziehung der einen (vgl. Fig. 10) durch die Kompensatoren, der anderen aber, ohne diese zu durchdringen. Jede dieser Hälften erzeugt eine horizontale Anziehungskomponente, deren Größe, auf die Masseneinheit bezogen, ohne Berücksichtigung einer möglichen Absorption gleich  $G/\pi$  und nach der Seite gerichtet ist, wo die anziehende Halberde liegt. Findet aber Absorption statt, so ist die von ihr beeinflusste Anziehung einer Erdhälfte

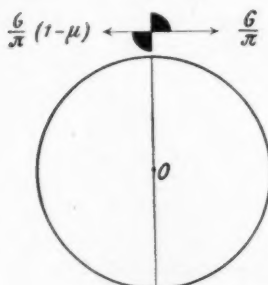


Fig. 10.

$$\frac{G}{\pi} (1 - \mu)$$

zu setzen, wo  $\mu$  vom Absorptionsvermögen des dazwischenliegenden Körpers, ferner von seiner Form, seiner Größe und Lage abhängig ist.

Die Wirkung beider Erdhälften zusammen ergibt so eine horizontale Kraftkomponente, die nach jener Seite gerichtet ist, wo die Absorption geringer ist. Wenn wir mit  $m$  die Masse je einer Kugel am Drehwagebalken, und  $l$  ihren Drehungshalbmesser bezeichnen, so sind die aus der einseitigen Absorption entstehenden Drehungsmomente in den vier Kompensatorstellungen

Stellung I

$$\Phi_1 = - 2 m l \frac{G}{\pi} \mu;$$

Stellung II

$$\Phi_2 = + 2 m l \frac{G}{\pi} \mu;$$

Stellung III

$$\Phi_3 = - 2 m l \frac{G}{\pi} \mu;$$

Stellung IV

$$\Phi_4 = + 2 m l \frac{G}{\pi} \mu.$$

Das Gleichgewicht des Drehwagebalkens denken wir uns nun hervorgebracht von der Summe der Drehungsmomente  $F$  und  $\Phi$  einerseits, von dem gegen die Torsion wirkenden Drehungsmomente andererseits. Dieses letztere drücken wir in der Form  $\tau \vartheta_0 + \tau \vartheta$  aus, wo  $\vartheta_0$  eine Lage des Balkens be-

deutet, bei welcher  $\xi = 0$  ist und  $\vartheta_0 + \vartheta$  den ganzen Torsionswinkel darstellt. Setzen wir noch

$$\xi = l \vartheta,$$

so erhalten wir als Bedingungen des Gleichgewichtes in den vier Stellungen I–IV:

$$\tau \vartheta_0 + \tau \vartheta_1 = A l \vartheta_1 + B \cos \frac{\pi}{4} + \zeta D - 2 m l \frac{G}{\pi} \mu,$$

$$\tau \vartheta_0 + \tau \vartheta_2 = A l \vartheta_2 - B \cos \frac{\pi}{4} - \zeta D + 2 m l \frac{G}{\pi} \mu,$$

$$\tau \vartheta_0 + \tau \vartheta_3 = A l \vartheta_3 - B \cos \frac{\pi}{4} + \zeta D - 2 m l \frac{G}{\pi} \mu,$$

$$\tau \vartheta_0 + \tau \vartheta_4 = A l \vartheta_4 + B \cos \frac{\pi}{4} - \zeta D + 2 m l \frac{G}{\pi} \mu.$$

Wird von der Summe der ersten und dritten dieser Gleichungen die Summe der zweiten und vierten abgezogen, so erhält man:

$$(\tau - A l)(\vartheta_1 + \vartheta_3 - \vartheta_2 - \vartheta_4) = 4 \zeta D - 8 m l \frac{G}{\pi} \mu.$$

Bei der Beobachtung mit Spiegel und Skala bezeichnen wir mit  $n$  die Skalenablesung und mit  $L$  die in Skalenteilen abgemessene Entfernung der Skala vom Spiegel, es ist also

$$n_1 + n_3 - n_2 - n_4 = \frac{8 L D \zeta}{\tau - A l} - \frac{16 L m l}{\tau - A l} \frac{G}{\pi} \mu.$$

Zur Berechnung unserer nachfolgenden Beobachtungen wurde nun, dem benutzten Apparate entsprechend, als Resultat hier genügenden angenäherten Abmessungen gesetzt

$$L = 1315 \text{ Skalenteile, } m = 30 \text{ g, } l = 25 \text{ cm, } G = 982 \text{ C.G.S.}$$

$$\tau - A l = 0,103 \text{ C.G.S.}$$

Letztere Größe wurde durch Ablenkungsversuche am Kompensatorbalken bestimmt. Mit diesen Werten wird

$$n_1 + n_3 - n_2 - n_4 = \frac{8 L D}{\tau - A l} \zeta - 47890 \cdot 10^6 \mu.$$

Der Faktor von  $\zeta$  läßt sich aus den Dimensionen des Apparates unschwer berechnen, wir haben aber deren Größe auch in der Weise durch Beobachtungen bestimmt, daß wir zwei Werte der Größe  $(n_1 + n_3 - n_2 - n_4)$  feststellten, die verschiedenen Werten von  $\zeta$  entsprachen. Es ist dann

$$(n_1' + n_3' - n_2' - n_4') - (n_1 + n_3 - n_2 - n_4) = \frac{8 L D}{\tau - A l} (\zeta' - \zeta).$$



Eine solche Veränderung des Wertes von  $\zeta$  kann durch ein Senken oder Heben der auf Fußschrauben stehenden Kompensatoren leicht bewerkstelligt und gemessen werden. Aus solchen Versuchen erhielten wir, wenn  $\zeta$  in Zentimeter abgemessen wird

$$\frac{8LD}{1 - Al} = 608,$$

so daß

$$n_1 + n_3 - n_2 - n_4 = 608 \zeta - 47890 \cdot 10^6 \cdot \mu$$

und

$$\mu = \frac{n_3 + n_4 - n_1 - n_2}{47890 \cdot 10^6} + \frac{608 \zeta}{47890 \cdot 10^6}.$$

Die Zahlenwerte dieser Formel legen wohl ein Zeugnis dafür ab, wie groß die bei der Bestimmung von  $\mu$  erreichbare Genauigkeit sei, weisen aber auf die Schwierigkeiten hin, die dabei überwunden werden müssen. Diese bestehen nicht nur bezüglich des Schutzes von störenden Einflüssen, welche bei so großer Genauigkeit doppelt in die Wagschale fallen, sondern besonders auch darin, daß der Einfluß des mit  $\zeta$  multiplizierten Gliedes möglichst vermieden oder sicher festgestellt werden muß.

Bei unseren Versuchen bot die feste Aufstellung des Apparates in einem gleichmäßig temperierten Kellerraume gehörigen Schutz und mit Hilfe von Kathetometern gelang es uns, auch die Kompensatoren so zu stellen, daß  $\zeta$  nicht mehr als etwa  $\frac{1}{500}$  cm von Null verschieden war. Unter solchen Umständen haben wir schon vor mehreren Jahren drei Versuchsreihen ausgeführt, deren Ablesungen in folgender kleinen Tabelle zusammengestellt sind.

Stellung		Ablesungen		
		17. April	20. April	23. April
I.	$n_1$	246,2	264,0	266,2
II.	$n_2$	247,4	264,6	268,0
III.	$n_3$	246,3	263,8	267,1
IV.	$n_4$	246,0	262,5	266,6
I.	$n_1$	246,0	263,9	265,9

Hieraus berechnen wir mit Weglassung des mit  $\zeta$  proportionalen Gliedes aus den Beobachtungen



$$\text{vom 17. April} \quad \mu = + \frac{1}{47890 \cdot 10^6} \cdot 1,0,$$

$$\text{vom 20. April} \quad \mu = - \frac{1}{47890 \cdot 10^6} \cdot 0,6,$$

$$\text{vom 23. April} \quad \mu = + \frac{1}{47890 \cdot 10^6} \cdot 1,4.$$

Bedenken wir, daß eine fehlerhafte Einstellung bezüglich des  $\zeta$  von nur  $\frac{1}{50} \text{ mm} = \frac{1}{500} \text{ cm}$  einen die Einheit etwas übersteigenden Fehler in diesem Werte bedingen würde, so sind wir berechtigt, die von Null um etwa eine Einheit abweichenden verschiedenen Werte von  $\mu$  dieser Unvollkommenheit zuzuschreiben. Soweit es auf Grund weniger Versuche erlaubt ist, können wir also behaupten, daß  $\mu$ , das ist die Schwächung der Erdanziehung durch den dazwischen liegenden Kompensatorquadranten, kleiner als ihr fünfzigtausend Millionstel war.

Versuche, wie die beschriebenen, sollten mehrfach wiederholt werden, um an Beweiskraft zu gewinnen, auch sollte ihre Genauigkeit möglichst gesteigert werden, was besonders durch eine derartige Dimensionierung des Apparates erreicht werden kann, die uns von dem Einflusse des mit  $\zeta$  proportionalen Gliedes befreit.

Betrachten wir nun die Bedeutung des bezüglich  $\mu$  erzielten Resultates. Wir glauben uns der Mühe einer genauen Berechnung dieser Größe unter der Vorausschickung einer der durchstrahlten Strecke proportionalen Absorption hier entziehen zu dürfen, handelt es sich ja doch nur um Feststellung eines minimalen Grenzwertes. Wohl sind wir aber berechtigt, zu behaupten, daß die durchschnittliche Länge jener Teile der von den Punkten der einen Erdhälfte zur angezogenen Kugel führenden Geraden, welche in die Masse des Kompensators fallen, nicht unter fünf Zentimeter ist. Wir können also behaupten, daß die Anziehung der Erde beim Durchgang durch eine Bleischicht von 5 cm Dicke keine Absorption erleidet, welche ein fünfzigtausend Millionstel derselben erreicht. Für eine Bleischicht von 1 m Dicke würde diese untere Grenze ein zweitausendfünfhundert Millionstel betragen und für die Absorption längs eines ganzen Erddurchmessers etwa ein Vierhundertstel. Nehmen wir aber an, daß die Absorption mit der durchlaufenden Masse proportional wäre, so müßte unseren Versuchen entsprechend die Absorption der ganzen Erde längs

eines Durchmessers derselben weniger, als etwa ein Achthundertstel betragen.

Beobachtungen der Ebbe und Flut und der sie erzeugenden Kräfte lassen aber diesen minimalen Grenzwert einer eventuellen Absorption der Anziehung durch den Erdkörper noch um vieles kleiner erscheinen.

In einfachster Weise können wir uns hiervon überzeugen, wenn wir die der Anziehung von Sonne oder Mond entsprechenden vertikalen Kräfte in zwei Punkten auf der Erde betrachten, für welche die Zenitdistanz jener Himmelskörper  $\zeta = 0$  und  $\zeta = \pi$  ist.

$$\text{Statt} \quad -Z = 2f \frac{M}{D^2} \frac{a}{D}$$

wie im Falle, daß überhaupt keine Absorption stattfindet, ist, wenn eine solche vorhanden, zu setzen:

$$-Z = 2f \frac{M}{D^2} \frac{a}{D} + \mu f \frac{M}{D^2},$$

oder

$$-Z = 2f \frac{M}{D^2} \frac{a}{D} \left( 1 + \mu \frac{D}{2a} \right),$$

wo  $\mu$  die Größe jenes Teiles der Anziehung bedeutet, der von der Erdmasse längs der Strecke eines Erdhalbmessers absorbiert wird.

Für die durch die Sonne erzeugte Flut haben wir also zu setzen:

$$-Z = 2f \frac{M}{D^2} \frac{a}{D} (1 + 11800 \mu),$$

über die Mondflut aber

$$-Z = 2f \frac{M'}{D'^2} \frac{a}{D'} (1 + 30,14 \mu).$$

Würde  $\mu$  den durch unsere Drehwagebeobachtungen festgestellten Grenzwert von  $\frac{1}{1000}$  erreichen, dann wäre für die Sonne

$$-Z = 2f \frac{M}{D^2} \frac{a}{D} (1 + 7,4),$$

für den Mond aber

$$-Z = 2f \frac{M'}{D'^2} \frac{a}{D'} (1 + 0,02).$$

Die Sonnenflut müßte in diesem Falle auf etwa ihr Acht-faches vergrößert werden, während die Mondflut kaum merklich verändert würde.

Schon die rohesten Beobachtungen der Fluterscheinung widersprechen einer solchen Annahme. Wohl aber kann daran gedacht werden, durch Beobachtung der fluterzeugenden Kräfte den Wert von  $\mu$  zu ermitteln oder wenigstens die untere Grenze genauer zu bestimmen, die diesen Wert nicht übersteigen kann.

Das Verhältnis der fluterzeugenden Kraft der Sonne zu der des Mondes ist nämlich entsprechend den vorangehenden Betrachtungen

$$\frac{Z}{Z'} = \frac{Z_0}{Z_0'} (1 + 11\,700 \mu),$$

wo  $Z_0/Z_0'$  jenen theoretischen Wert dieses Verhältnisses darstellt, den wir unter der Annahme  $\mu = 0$  erhalten.

Nehmen wir an, wozu wir wohl berechtigt sind, daß die langjährigen Beobachtungen der Fluterscheinungen uns, wenn nicht zu mehr, doch wenigstens zur Behauptung berechtigen, daß die Höhe der Sonnenfluten jene der Mondfluten nicht übersteigt, so haben wir hiermit auch den Beweis dafür geliefert, daß die Anziehung der Sonne längs eines Erdhalbmessers weniger als ihren zehntausendstel Teil einbüßt. Zu diesem Resultat gelangen wir mit Hilfe unserer letzten Formel, indem wir in ihr

$$\frac{Z}{Z'} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{Z_0}{Z_0'} = \frac{1}{2,2}$$

setzen.

Genauere Resultate dieser Art sind wohl von Beobachtungen der fluterzeugenden Kraft zu erwarten.

### 9. Einige Versuche mit radioaktiven Substanzen.

Die Untersuchungen radioaktiver Substanzen haben wir nach zwei Richtungen ausgeführt; erstens bezüglich des Verhältnisses ihrer Masse zu der auf sie ausgeübten Erdanziehung, zweitens die Frage betreffend, ob sie auf diese Anziehung absorbierend wirken oder selbst eine spezifische Anziehung oder Abstoßung bewirken.

#### a) Beobachtungen, betreffend das Verhältnis von Masse und Anziehung.

Die Versuche führten wir mit einem Radiumpräparate aus, das, aus dem Curieschen Laboratorium stammend, uns zur Verfügung gestellt wurde. Das Gesamtgewicht des in einem Glasröhrchen eingeschlossenen Präparates war 0,200 g,

0,100 g reines  $\text{RaBr}_2$  enthaltend mit einer Aktivität gleich dem 1500000fachen des metallischen Uraniums. Dieses Präparat stand uns nur auf kurze Zeit zur Verfügung und zwar am Beginne dieser Arbeit, weshalb wir auch unsere Beobachtungen nur nach dem ersten Verfahren ausführen konnten.

Das Radium enthaltende Glasröhrchen wurde in der Mitte einer verschlossenen Messingröhre sorgfältig befestigt und in dieser auf das Balkenende gehängt, dann wurden die Beobachtungen in derselben Weise ausgeführt, wie dies mit dem Magnalium und dem Holze geschah.

Dabei hatten wir aber zu berücksichtigen, daß die hängende Masse  $M_a$  nicht homogen war, und nur etwa ihr  $1/250$ tel Teil aus  $\text{RaBr}_2$  bestand.

Die direkte Bestimmung bezog sich so auf einen mittleren Attraktionskoeffizienten  $\kappa_a$  der ganzen Masse  $M_a$ , zu dem der Attraktionskoeffizient  $\kappa_{\text{Ra}}$  des Radiumbromids nur mit der Masse von  $1/250 M_a$  ihren Beitrag leistet. Wenn wir also in diesem Falle den Wert  $(\kappa_a - \kappa_{\text{Pl}})$  der Einwirkung des Radiumpräparates allein zuschreiben, so werden wir zu setzen haben:

$$\kappa_{\text{Ra}} - \kappa_{\text{Pl}} = \frac{1}{250} (\kappa_a - \kappa_{\text{Pl}}).$$

#### *Erste Versuchsreihe.*

An dem Ende  $a$  des Balkens 1 des doppelten Schwerevariometers wurde die das Radiumpräparat enthaltende geschlossene Messingröhre von 9,62 cm Länge und 0,90 cm Durchmesser gehängt. Es war

$$M_a = 25,396 \text{ g, } h = 21,55 \text{ cm.}$$

Aus den beobachteten 15 Werten ergibt sich der Mittelwert

$$m = + 6,566 \pm 0,028$$

und aus den beobachteten 43 Werten

$$v = - 1,736 \pm 0,008.$$

#### *Zweite Versuchsreihe.*

Als solche dienten die mit demselben Apparate für die Bestimmung  $(\kappa_{\text{Holz}} - \kappa_{\text{Pl}})$  ausgeführten Beobachtungen (vgl. S. 34), wobei das Ende  $a$  mit einem Platinzylinder belastet war.

Die Mittelreste dieser Versuchsreihe waren

$$m' = + 6,595 \pm 0,016; \quad v' = - 1,754 \pm 0,011.$$

Bei der Berechnung von  $\kappa_a - \kappa_{Pt}$  nach der Formel (17) setzen wir als Mittelwert

$$M_a = 25,396 \text{ g} \quad \text{und} \quad \frac{\tau}{4 L M_a l_a G \sin \theta} = 0,1178 \cdot 10^{-6}.$$

In der N-Stellung waren

$$n = 191,5 \quad \text{und} \quad n' = 191,3,$$

also  $n - n' = +0,2$ , demnach ist  $m(\Delta a - \Delta a')$  zu vernachlässigen.

Es ist

$$\frac{h - h'}{h} = +0,017 \quad \text{und} \quad v \frac{h - h'}{h} = -0,029,$$

so erhalten wir

$$\kappa_a - \kappa_{Pt} = +0,005 \cdot 10^{-6} \pm 0,002 \cdot 10^{-6}.$$

So wie bei der Berechnung der Versuche mit Magnalium und Holz nach der Formel (20) berechnet, erhalten wir aber

$$\kappa_a - \kappa_{Pt} = -0,001 \cdot 10^{-6} \pm 0,002 \cdot 10^{-6}$$

und endlich nach unserer vorangehenden Feststellung

$$\kappa_{Ra} - \kappa_{Pt} = -0,25 \cdot 10^{-6} \pm 0,50 \cdot 10^{-6}.$$

#### b) Beobachtungen, betreffend eine spezifische mechanische Wirkung von Radiumpräparaten.

Wir wollen hier noch über einige Versuche Bericht erstatten, die wir vor mehreren Jahren (1904) mit der Absicht anstellten, eventuelle mechanische Wirkungen der Radiumpräparate auf den Drehwagebalken zu entdecken.

Die Untersuchungen führten uns in das von Hrn. Robert Geigel in seiner Abhandlung „Über Absorption von Gravitationsenergie durch radioaktive Substanzen“<sup>1)</sup> betretene Gebiet. Nach den bald erfolgten Bemerkungen des Hrn. W. Kaufmann zu der Arbeit des Hrn. R. Geigel<sup>2)</sup> schien uns damals die Veröffentlichung noch weiterer Bemerkungen überflüssig zu sein, doch glauben wir, daß unsere Versuche im Rahmen dieser Abhandlung der Aufzählung Wert sind.

Bei den Versuchen wurden 10 mg eines Radiumpräparates benützt; die Aktivität dieses Präparates war etwa die 1000000fache des Metalluraniums.

1) R. Geigel, Ann. d. Phys. 10. S. 429. 1903.

2) R. Geigel, Ann. d. Phys. 10. S. 894. 1903.

Das Radiumpräparat war in einem Glasröhrchen von 4,5 cm Länge und 0,5 cm äußerem Durchmesser und 0,66 g Gewicht eingeschlossen.

*Versuch Nr. 1.*

Nach der Ablesung der Gleichgewichtslage des Schwerevariometers wurde das Radiumpräparat enthaltende Röhrchen innerhalb des Drehwagegehäuses gebracht und dort auf einem leichten Drahtgerippe so aufgestellt, daß dieses Röhrchen am Ende  $b$  des Balkens parallel dem dort eingeschobenen Platinzylinder mit demselben in gleiche Höhe zu liegen kam.

Das Radiumröhrchen wurde einmal auf die eine, dann auf die entgegengesetzte Seite des schwebenden Platinzylinders gestellt und jedesmal ihre Gleichgewichtslage bestimmt. Die Entfernung  $H$  zwischen Platinzylinder und Röhrchen konnte mit Hilfe der Ablesung jenes Skalenteiles  $n_z$  berechnet werden, bei welcher der noch schwingende Balken von dem Röhrchen zurückgeschlagen wurde.

In der Entfernung  $H = 50$  Skt. = 4,05 mm hat das Röhrchen den Platinzylinder um 1,8 Skalenteile abgestoßen, entsprechend einer Kraft  $P$ , deren Größe sich leicht berechnen läßt aus

$$\frac{lP}{\tau} = \frac{n' - n}{2L},$$

also

$$\frac{20P}{0,5} = \frac{1,8}{2464}.$$

Abstoßungskraft  $P = 0,000018_2$ .

Bei der Wiederholung des Versuches erhielten wir

Abstoßungskraft  $P = 0,000018_8$ .

Das pulverförmige Radiumpräparat lag bei diesen Versuchen längs dem Röhrchen am Boden desselben verstreut, also um etwa 2 mm unter der Achse des Platinzylinders.

*Versuch Nr. 2.*

Alles wie bei Versuch Nr. 1 mit dem Unterschiede, daß das Radiumröhrchen um etwa 3 mm über den Platinzylinder gehoben wurde. Bei  $H = 41$  Skt. = 3,2 mm zieht das Röhrchen den Platinzylinder um 2,5 Skalenteile an mit der

Anziehungskraft  $P = 0,000025_3$ .

*Versuch Nr. 3.*

Statt der das Radiumpräparat enthaltenden Röhre wurde eine leere Glasröhre gleicher Form und Größe, wie bei Versuch Nr. 1 in das Instrumentengehäuse gebracht. Es zeigten sich nur Spuren einer Abstoßung, welche  $P = 0,000001$  nicht überstiegen und mit der Zeit abzunehmen schienen.

Mehrfach haben wir noch derartige Versuche ausgeführt und das erstgefundene Resultat dadurch bestätigt. Ihre einfachste, aber mehr als leichtsinnige Erklärung wäre die Annahme einer spezifischen Anziehungskraft der radioaktiven Substanz, entsprechend der Anziehung bei Versuch Nr. 2, nebst einer Absorption der Erdanziehung durch dieselbe, welche die scheinbare Abstoßung des Versuchs Nr. 1 bewirken könnte. Der Versuch Nr. 3, bei welchem eine solche Substanz ausgeschlossen war, scheint ähnliche Schlüsse noch zu bekräftigen, doch dürfen wir nicht vergessen, daß dies hierbei benützte Glasröhrchen das Radiumröhrchen nur bezüglich seiner Massenwirkung, nicht aber bezüglich seiner anderen, insbesondere ihrer Wärmewirkung ersetzt.

Um jeden Zweifel in dieser hochwichtigen Frage aufheben zu können, haben wir die Wirkung eines Glasröhrchens untersucht, welches nicht nur der Form und der Masse nach gleich dem Radiumröhrchen war, sondern auch wie diese beständig Wärme ausstrahlte.

In das Glasröhrchen wurde ein kurzes Stück Platindraht von 0,04 mm Durchmesser, mit dem elektrischen Widerstande von 1,41 Ohm eingeschmolzen und dann durch einen Strom von entsprechender Intensität erwärmt.

Voran ging ein sorgfältiger Vergleich der Wärmemengen, welche dieses durch den Strom erwärmte Röhrchen und das Radiumröhrchen in gleichen Zeiten ausstrahlten. Ein solcher Vergleich, mit Hilfe thermoelektrischer Methoden ausgeführt, ergab als Resultat, daß unser Radiumpräparat in der Stunde 0,169 g Kalorien ausstrahlte, entsprechend einer Stromstärke von 0,0118 Amp. Das Röhrchen mit dem Platindraht wurde nun in das Innere des Gehäuses gebracht und die Stromleitung durch sorgfältig verschlossene Bohrlöcher festgestellt.

*Versuch Nr. 4.*

Bei  $H = 32$  Skt. = 2,4 mm trat eine Abstoßung von 1,8<sub>6</sub> Skt. ein, es war also die



Abstoßungskraft  $P = 0,000018$ ,  
gleich der Abstoßungskraft im Versuche Nr. 1.

*Versuch Nr. 5.*

Der Drehwagebalken wurde um etwa 3 mm tiefer gesenkt.  
Es war eine Anziehung wie bei Versuch Nr. 2

Anziehungskraft  $P = 0,000024$ .

Bei Wiederholung der Versuche Nr. 4 und Nr. 5 mit einer größeren Stromstärke von  $\tau = 0,0250$  Amp. ergab sich im Falle gleicher Höhe des Platinzylinders und des Erwärmungsdrahtes (Versuch Nr. 4) eine Abstoßung von 9 Skalenteilen, im Falle der höheren Lage dieses letzteren (Versuch Nr. 5) aber eine Anziehung bis zur Berührung.

Wir glauben durch diese Versuche zur Genüge bewiesen zu haben, daß die Anziehungen und Abstoßungen, die sich in den Versuchen Nr. 1 und Nr. 2 kundgaben, nicht von einer spezifischen mechanischen Wirkung des Radiumpräparates und auch nicht von einer Absorption der Erdanziehung hervorgerufen wurden, sondern lediglich die Folge thermischer Einwirkungen waren, welche hauptsächlich durch Erwärmung der Luft mechanisch tätig werden.

Das benützte Radiumpräparat von etwa 10 mg Gewicht übte also auf den Drehwagebalken in der Entfernung von etwa 4 mm gewiß keine spezifische anziehende oder abstoßende Kraft aus, die die Größe einer Einheit von der Ordnung  $10^{-6}$  C.G.S. erreichen würde. Auch konnte keine Spur einer absorbierenden Wirkung der Erdanziehung erkannt werden.

# 10. Zusammenstellung der Resultate.

## 1. Beobachtungen nach der Methode von Eötvös.

Betrachten wir in der Newtonschen Formel

$$P = f \frac{m m'}{r^2}$$

$f$  als von der Beschaffenheit des angezogenen Körpers abhängig und setzen

$$f = f_0 (1 + \kappa),$$

so können die Resultate unserer Beobachtungen durch die aus ihnen berechneten Werte der Größe  $\kappa$ , des spezifischen Attraktionskoeffizienten, dargestellt werden. Es folgen hier die



gefundenen Werte von  $\kappa - \kappa_{Pt}$  mit den mittleren Fehlern ihrer Bestimmung, wo

$$\kappa_{Pt} = 0, \text{ wenn } f_{Pt} = f_0.$$

	$\kappa - \kappa_{Pt}$
Magnesium . . . . .	$+ 0,004 \cdot 10^{-6} \pm 0,001 \cdot 10^{-6}$
Schlangenholz . . . . .	$- 0,001 \cdot 10^{-6} \pm 0,002 \cdot 10^{-6}$
Kupfer . . . . .	$+ 0,004 \cdot 10^{-6} \pm 0,002 \cdot 10^{-6}$
Wasser . . . . .	$- 0,006 \cdot 10^{-6} \pm 0,003 \cdot 10^{-6}$
Kristall. Kupfersulfat . . . . .	$- 0,001 \cdot 10^{-6} \pm 0,003 \cdot 10^{-6}$
Kupfersulfatlösung . . . . .	$- 0,003 \cdot 10^{-6} \pm 0,003 \cdot 10^{-6}$
Asbest . . . . .	$+ 0,001 \cdot 10^{-6} \pm 0,003 \cdot 10^{-6}$
Talg . . . . .	$- 0,002 \cdot 10^{-6} \pm 0,003 \cdot 10^{-6}$

Diese für  $\kappa - \kappa_{Pt}$  gefundenen Mittelwerte sind in vier Fällen kleiner, in drei Fällen etwas größer als ihre mittleren Fehler und in einem Falle sind sie gleich.

Die Wahrscheinlichkeit eines von Null verschiedenen Wertes der Größe  $\kappa$  ist aber selbst in diesen Fällen eine verschwindend kleine, da eine Durchsicht der entsprechenden Beobachtungsdaten längere Reihen nahezu gleich bleibender Abweichungen vom Mittelwerte erkennen läßt, deren Einfluß auf dieses Mittel nur durch noch viel länger fortgesetzte Beobachtungen behoben werden könnte.

Zwischen den der Beobachtung unterworfenen Körpern befinden sich solche von sehr verschiedenem spezifischen Gewicht, verschiedenem Molekulargewicht und Molekularvolum, auch solche von verschiedenem Aggregatzustande und verschiedener Struktur.

Wir glauben behaupten zu dürfen, daß bezüglich der Erdanziehung  $\kappa$  für all diese Körper den Wert von  $0,005 \cdot 10^{-6}$  nicht erreicht.

Bezüglich der Frage, ob sich die Anziehung infolge einer in dem angezogenen Körper vorgegangenen chemischen Reaktion oder Auflösung verändert, erhielten wir noch kleinere Grenzwerte.

Für die Landoltsche Silbersulfat-Ferrosulfatreaktion fanden wir nämlich

$$\kappa_{\text{vor}} - \kappa_{\text{nach}} = 0,000 \cdot 10^{-6} \pm 0,002 \cdot 10^{-6},$$

und für die Auflösung von Kupfersulfat in Wasser nach dem von Heydweiller angegebenen Verhältnis

$$\kappa_{\text{vor}} - \kappa_{\text{nach}} = 0,002 \cdot 10^{-6} \pm 0,002 \cdot 10^{-6}.$$

## 2. Beobachtungen im Meridian.

Für die Anziehung der Sonne erhielten wir

$$\kappa_{\text{Magnesium}} - \kappa_{\text{Platin}} = + 0,006 \cdot 10^{-6}.$$

## 3. Beobachtungen, betreffend eine der Absorption ähnliche Beeinflussung oder Anziehung durch dazwischenliegende Körper.

Aus Versuchen mit dem Gravitationskompensator ergab sich, daß eine Bleischicht von 5 cm Dicke keine Absorption bewirkt, welche die Größe  $0,00002 \cdot 10^{-6}$  erreicht.

Dementsprechend:

Absorption einer 1 m starken Bleiplatte  $< 0,0004 \cdot 10^{-6}$  Erdanziehung, Absorption durch die Erde längs eines ihrer Durchmesser  $< \frac{1}{800}$  Erdanziehung.

## 4. Beobachtungen mit radioaktiven Substanzen.

Aus Versuchen mit einem Radiumpräparate von 0,20 g Gewicht ergab sich

$$\kappa_{\text{RaBr}_2} - \kappa_{\text{Pt}} = - 0,25 \cdot 10^{-6} \pm 0,50 \cdot 10^{-6}.$$

Aus Versuchen mit einem anderen Präparate ersahen wir:

a) daß dasselbe auf einen um 4 mm von ihm abstehenden Platinzylinder von 30 g Gewicht keine spezifische Anziehung oder Abstoßung ausübt, welche eine Einheit der Ordnung  $10^{-6}$  erreichen würde;

b) daß dieses Präparat auch keine bemerkbare Absorption der Erdanziehung bewirkt.

Mit wenigen Worten können wir das Endresultat unserer Arbeit aussprechen.

Wir haben eine Reihe von Beobachtungen angestellt, die an Genauigkeit alle vorangehenden übertrafen, doch könnten wir in keinem Falle eine merkbare Abweichung von dem Gesetze der Proportionalität von Trägheit und Gravität entdecken.

(Eingegangen 27. Februar 1922.)

### 3. *Zur Theorie einer neuen Umwandlungs- erscheinung in Metallen; von G. Borelius.*

1. Neulich ist in zwei Mitteilungen zu diesen Annalen<sup>1) 2)</sup> über eine durch thermoelektrische Messungen an Eisen aufgewiesene neue Umwandlungserscheinung berichtet worden. Die Erscheinung besteht in einer ganzen Reihe von Umwandlungen, die mit gleichen Temperaturdifferenzen wiederkehren, so daß die Lage der  $n$ -ten Umwandlung auf der absoluten Temperaturskala angenähert durch die Gleichung

$$(1) \quad T_n = A \cdot n$$

angegeben werden kann, wo  $A$  eine konstante Größe ist. Später ist diese als  $Z$ -Umwandlungen bezeichnete Erscheinung auch in Wolfram gefunden worden, worüber später, wenn die Messungen auch auf andere Metalle ausgedehnt worden sind, näher berichtet werden soll. Für die reinsten Eisensorten wurde als Mittelwert  $A = 97^\circ$  gefunden und für Wolfram  $A = 81^\circ$ . Im folgenden werde ich versuchen, eine theoretische Erklärung der Sache zu geben, die sie auf die quantenhafte Verteilung der Schwingungsenergie der Atome zurückführt.

2. Nach den von Born und v. Kármán<sup>3)</sup> u. a. entwickelten Vorstellungen führen die Atome im Atomgitter der einfachen festen Körper Schwingungen aus, deren Frequenzen sich so in der Nähe einer oberen Grenzfrequenz ansammeln, daß man mit ziemlich guter Annäherung, jedenfalls bei höheren Temperaturen, mit einer gemeinsamen Frequenz  $\nu$  rechnen darf. In dieser Annäherung hat man sich also die Schwingungsenergie in Quanten von der Größe  $h\nu$  ( $h$  Plancks Konstante) verteilt vorzustellen. Mit steigender Temperatur nimmt die

1) G. Borelius u. F. Gunneson, Ann. d. Phys. 67. S. 227. 1922.

2) G. Borelius, Ann. d. Phys. 67. S. 236. 1922.

3) M. Born u. Th. v. Kármán, Phys. Zeitschr. 13. S. 297. 1912.

Zahl der Quanten zu. Von dieser in sich ganz stetigen Zunahme können wir zu der Möglichkeit von besonders ausgezeichneten Temperaturen durch die Annahme gelangen, daß eine höhere Quantenzahl sich dann in anderer Weise geltend machen kann, wenn ein bestimmter Bruchteil der Atome ihn erreicht hat. Demgemäß machen wir also die Hypothese: Die  $Z$ -Umwandlung von Ordnungszahl  $n$  tritt bei der Temperatur auf, wo die Zahl der Atome, deren Quantenzahl gleich oder größer als  $n$  ist, zu einem bestimmten Bruchteile ( $1/r$ ) der gesamten Atome gestiegen ist.

3. Es gilt dann zunächst, die statistische Verteilung von  $P$  Quanten auf  $N$  Atome zu berechnen. Die Durchführung der Berechnung verdanke ich meinem Freunde, dem Privatdozenten für Mathematik F. Ryde. Nach den allgemeinen Prinzipien der statistischen Mechanik können die  $P$  Quanten sich in

$$(2) \quad C_N(P) = \frac{(P + N - 1)!}{P!(N - 1)!}$$

verschiedenen und gleich wahrscheinlichen Weisen auf die  $N$  Atome verteilen. Die Wahrscheinlichkeit  $W_q$  dafür, daß ein willkürlich herausgegriffenes Atom in einem bestimmten Augenblicke  $q$  Quanten tragen soll, ist dann gleich dem Verhältnis der Zahl der gleich wahrscheinlichen Verteilungen der übrigen  $P - q$  Quanten auf den übrigen  $N - 1$  Atomen

$$(3) \quad C_{N-1}(P - q) = \frac{(P + N - q - 2)!}{(P - q)!(N - 2)!}$$

zu der ganzen Zahl der Komplexionen  $C_N(P)$ . Also ist

$$(4) \quad W_q = \frac{C_{N-1}(P - q)}{C_N(P)} = \frac{(P + N - q - 2)! P!}{(P + N - 1)!(P - q)!} (N - 1).$$

Wir suchen nun den Grenzfall dieser Funktion auf, wenn  $P$  und  $N$  ins Unendliche wachsen, während  $P/N$  einen endlichen Wert beibehält. Für große Werte von einer Zahl  $x$  hat man nun die Stirlingsche Annäherung

$$(5) \quad x! = x^x \cdot e^{-x} \cdot \sqrt{2\pi x},$$

und also ist für große  $N$  und  $P$

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} W_q &= \frac{(P+N-q-2)^{P+N-q-2}}{(P+N-1)^{P+N-1}} \cdot \frac{P^P}{(P-q)^{P-q}} \\ &\cdot \frac{e^{-(P+N-q-2)-P}}{e^{-(P+N-1)-(P-q)}} \cdot \sqrt{\frac{(P+N-q-2)P}{(P+N-1)(P-q)}} (N-1) \end{aligned} \right.$$

oder

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} W_q &= \left( \frac{P+N-q-2}{P+N-1} \right)^{P+N-1} \cdot \left( \frac{P}{P-q} \right)^{P-q} \frac{P^q}{(P+N-q-2)^{q+1}} \\ &\cdot e \cdot \sqrt{\frac{(P+N-q-2)P}{(P+N-1)(P-q)}} \cdot (N-1) \end{aligned} \right.$$

oder

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} W_q &= \left( 1 - \frac{q+1}{P+N-1} \right)^{P+N-1} \cdot \left( 1 + \frac{q}{P-q} \right)^{P-q} \\ &\cdot \left( \frac{P}{P+N-q-2} \right)^q \frac{N-1}{P+N-q-2} \cdot e \cdot \sqrt{\frac{(P+N-q-2)P}{(P+N-1)(P-q)}} \end{aligned} \right.$$

Nun ist aber

$$(9) \quad \lim_{P+N \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{q+1}{P+N-1} \right)^{P+N-1} = e^{-(q+1)}$$

und

$$(10) \quad \lim_{P \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{q}{P-q} \right)^{P-q} = e^q$$

und in den übrigen Faktoren von (8) können beim Grenzübergange  $q$ , 1 und 2 neben  $P$  und  $N$  versäumt werden, so daß

$$(11) \quad W_q = e^{-(q+1)} \cdot e^q \cdot e \cdot \left( \frac{P}{P+N} \right)^q \cdot \frac{N}{P+N}$$

oder

$$(12) \quad W_q = \frac{1}{\frac{P}{N} + 1} \left( \frac{\frac{P}{N}}{\frac{P}{N} + 1} \right)^q.$$

Fig. 1 zeigt nun diese Verteilungsfunktionen für die Quantenzahlen  $q = 0, 1, 2, 3, 4$  und 5 als Funktion von  $P/N$ , d. h. von der mittleren Quantenzahl der Atome, die bei höheren Temperaturen mit der absoluten Temperatur proportional ist. Die Kurven für  $q > 0$  zeigen flache Maxima bei  $P/N = q$ .

Die Kurven für  $q > 1$  tangieren die Abszissenachse in Origo. Bei einem bestimmten Wert von  $P/N$  bilden die Zahlen der Atome, die 0, 1, 2, 3 . . . Quanten tragen, eine geometrische Reihe.

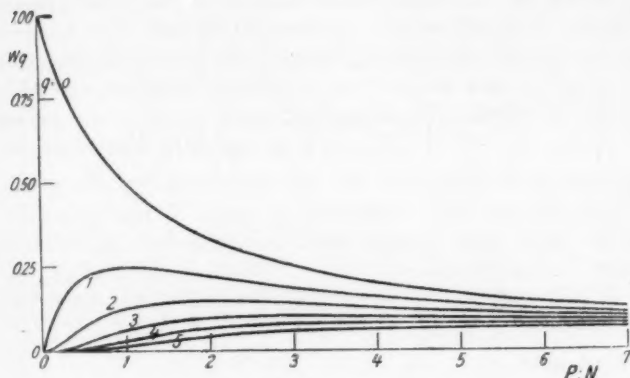


Fig. 1.

4. Da  $W_q$  der Bruchteil aller Atome ist, der in einem bestimmten Augenblicke  $q$  Quanten trägt, wird unserer Grundannahme gemäß

$$(13) \quad \sum_{q=0}^{q=n-1} W_q = 1 - \frac{1}{r}.$$

Die Glieder dieser Summe sind durch (12) bestimmt und bilden eine geometrische Reihe, deren Summation gibt

$$(14) \quad \left( \frac{\frac{P}{N}}{\frac{P}{N} + 1} \right)^n = \frac{1}{r}$$

oder

$$(15) \quad \log \left( 1 + \frac{N}{P} \right) = \frac{\log r}{n}.$$

Für nicht zu kleine Werte von  $P/N$ , d. h. nicht zu tiefe Temperaturen, wird dann angenähert

$$(16) \quad \frac{N}{P} = \frac{\log r}{n}.$$

Andererseits ist bei höheren Temperaturen angenähert die gesamte Energie der  $N$ -Atome

$$(17) \quad Ph\nu = 3NkT,$$

wenn  $k$  die Gaskonstante durch Avogadro'sche Zahl bezeichnet. Durch Elimination von  $P/N$  aus (16) und (17) erhalten wir die Temperatur der  $n$ -ten Umwandlung zu

$$(18) \quad T_n = \frac{h\nu}{k \cdot 3 \log r} \cdot n$$

oder wenn wir für  $h\nu/k$  die charakteristische Temperatur  $\Theta$  einführen,

$$(19) \quad T_n = \frac{\Theta}{3 \log r} \cdot n.$$

5. Vergleichen wir nun (18) oder (19) mit der empirischen Gleichung (1), sehen wir, daß die letztere erfüllt ist, und wir erhalten als Wert der Konstante

$$(20) \quad A = \frac{h\nu}{k \cdot 3 \log r} = \frac{\Theta}{3 \log r}.$$

$r$  läßt sich somit aus  $A$  und  $\Theta$  berechnen. Für eine genaue Berechnung von  $r$  müßte  $\Theta$  aus Messungen von der spezifischen Wärme bei tiefen Temperaturen erhalten sein, und an möglichst gleichem Material wie dem, für das  $A$  bestimmt worden ist. Leider liegen bei Eisen oder Wolfram noch keine Messungen über die spezifische Wärme bei tiefen Temperaturen vor, und wir müssen uns deshalb mit ziemlich unsicheren Werten für  $\nu$ , die von H. S. Allen<sup>1)</sup> gemäß der Lindemannschen Formel aus Schmelzpunkt und Atomvolumen berechnet worden sind, begnügen. Wir haben so:

für Eisen	$A = 97$	$\nu = 9,11 \cdot 10^{13}$	$\Theta = 444$	und	$r = 4,6$
für Wolfram	81	6,06	296		3,4

Die erhaltenen Werte von  $r$ , die vielleicht um eine halbe Einheit oder mehr unsicher sind, sind durchaus vernünftig. Die Umwandlungen treten ein, wenn etwa ein Viertel der Atome eine neue Quantenzahl erreicht haben.

6. Unsere Grundannahme vermag also den beobachteten Erscheinungen in ihren großen Zügen gerecht zu werden. Doch müssen wir auch auf verschiedene Punkte hinweisen, wo die Theorie noch beträchtlich vertieft werden muß.

1) H. S. Allen, Phil. Mag. 34. S. 478. 1917.

Erstens sind die Berechnungen nur für höhere Temperaturen durchgeführt worden. Doch interessiert uns das Temperaturgebiet unterhalb Zimmertemperatur noch wenig, da wir keine Methode kennen, um dort experimentell hineinzudringen.

Daß unsere Annahmen und Annäherungen jedenfalls zu grob sind, geht daraus hervor, daß wir theoretisch zu bestimmten Umwandlungstemperaturen gelangen, während experimentell immer ausgedehnte Umwandlungsgebiete beobachtet worden sind. Die Breite der Umwandlungsgebiete nimmt zwar in legierten Eisensorten zu; da sie aber auch in dem reinsten Eisen noch etwa  $30^{\circ}$  beträgt, ist es kaum wahrscheinlich, daß sie ganz auf die Rechnung der Fremdstoffe geschrieben werden kann.

Weiter ist es ein Mangel, daß wir noch keine bestimmte Vorstellungen über die Natur der Umwandlungen als Stütze unserer Grundannahme heranziehen können. Es ist ja nicht ohne weiteres verständlich, wie trotz der kontinuierlichen Zunahme der Quanten und ihre unregelmäßige Verteilung auf den Atomen ein bestimmter Bruchteil der Atome als Grenze auftreten kann, bei der, jedenfalls in nicht ganz reinen Metallen, schroffe Eigenschaftsänderungen auftreten. Vielleicht können wir doch eine gewisse Stütze für eine solche Annahme aus einem anderen Gebiete der Metallphysik erhalten. In Mischkristallegierungen, wo Röntgenuntersuchungen für eine unregelmäßige Verteilung der beiden Atomarten sprechen, treten dennoch bei gewissen Konzentrationen schroffe Eigenschaftsänderungen ein, wie dies besonders bei den Tammannschen Untersuchungen über die Einwirkungsgrenzen chemischer Agenzien sehr schön hervortritt. Diese kritischen Konzentrationsverhältnisse zwischen Atomen verschiedener Art stehen in gewisser Analogie zu unserer Annahme von kritischen Verhältnissen zwischen Atomen verschiedener Quantenzahl.

Lund, im März 1922.

(Eingegangen 24. März 1922.)



